Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WS 2003/04**
Prof. Dr. W. Hofmann

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Für die Funktion $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$ zeige man:
   (i) in $\mathbb{R}^2$ existieren die partiellen Ableitungen 1. Ordnung (ausrechnen).
   (ii) f ist in $(0, 0)$ nicht stetig partiell differenzierbar.

b) Man berechne die Gradienten der folgenden Abbildungen
   (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \sqrt{y^2 + 4}\, \ln(x^2 + 1)\,;$
   (ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) := z \exp(x^2 y)\,.$

Aufgabe 2:
Der Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Ohmscher Widerstände R_1, R_2 genügt nach den Kirchhoffschen Gesetzen der Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

a) Veranschaulichen Sie sich die Funktion $R = f(R_1, R_2)$ (Definitionsbereich?) durch Skizzierung einiger Höhenlinien (d.h. von Kurven $f(R_1, R_2) = c$, etwa für $c = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$). (Matlabfile: *plot*)

b) Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial R_1}, \dfrac{\partial f}{\partial R_2}$, $\operatorname{grad} f$.

c) Zeigen Sie: Der Vektor $\operatorname{grad} f\left(2, \frac{2}{3}\right)$ ist orthogonal zur Tangentialrichtung der Höhenlinie im Punkt $\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

Aufgabe 3:
Gegeben seien die Funktion $f,\ g,\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \sin^2(xy), \quad g(x, y) := \sqrt{y^2 + 4}\, \ln(x^2 + 1), \quad h(x, y) := y\, \sqrt{2x^2 + y^2}.$$

a) Man berechne die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen.

b) Man überprüfe, ob h eine C^1–Funktion ist.

c) Man berechne die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung h_{xy} und h_{yx} und überprüfe, ob h eine C^2–Funktion ist.

d) 2 Sonderpunkte: Zeichne $h,\ h_x,\ h_y,\ h_{xy}$ (Matlabb files *meshgrid, meshc*).

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariablen von der Funktion

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4t}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion

$$u(x, y) = \sin(kx) \cosh(ky)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Abgabetermin: 27.10.-31.10.2003 (zu Beginn der Übung)