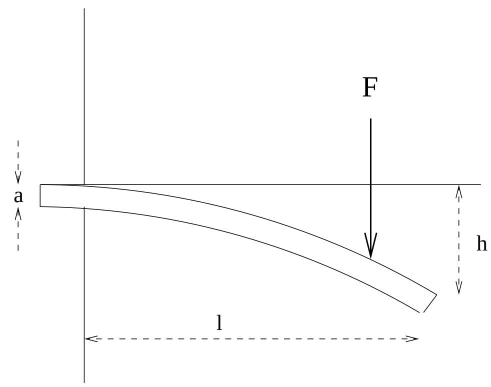
Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Sei $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass es für $t_0 = 0, \quad h = 2\pi$ kein $\theta \in (0,1)$ gibt, sodass $\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}'(t_0 + \theta h)h$ ist.



b) Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls einer Stahlsorte wird ein gerader Stab mit quadratischem Querschnitt auf einer Seite eingespannt, am anderen Ende belastet und dabei die (maximale) Auslenkung h gemessen.

(i) Man berechne E aus den Daten: $\ell = 50\,\text{cm}$, $a = 2\,\text{cm}$, $h = 2\,\text{mm}$ und $F = 130\,\text{N}$ gemäß

$$E = 4\,\frac{F\ell^3}{ha^4}.$$

(ii) Welchen maximalen **relativen** Fehler liefert die **lineare Fehlerrechnung** (17.2.6), wenn F auf $0.5\,\%$, a und ℓ auf $1\,\%$ und h auf $3\,\%$ genau gegeben sind?

Aufgabe 10:

a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

das Taylorpolynom $T_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0,0)$ sowie das zugehörige Restglied $R_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)$.

Schätzen Sie $|R_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)|$ auf dem Quadrat $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]^2$ nach oben ab.

b) Berechnen Sie die Taylorpolynome 3. Grades der folgenden Funktionen in den angegebenen Entwicklungspunkten:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \cdot \tan y && \text{in} \quad (0,0) \\ h(x,y,z) &= x^3 + xyz^2 + (x-y)^2(x-z) && \text{in} \quad (0,0,0) \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

a) Besitzt die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by + c, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Extremwerte und wenn ja was für welche?

b) Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere sie.

(i) $f(x,y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 16$

(ii) $f(x,y) = \sin(x) \cdot \cosh(y)$

(iii) $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$

Untersuchen Sie insbesondere, ob in Aufgabe c) strenge lokale Maxima existieren. (*Hinweis zu iii): Schreiben Sie* $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ *mit* $\varphi(\rho) = \rho e^{-\rho}$ *und wenden Sie die Kettenregel an.*)

Aufgabe 12:

a) Zeigen Sie, dass durch die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x\cos(z)\ln(1+y^2) + xy &= 0, \\ z\cos(x+y-z) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $P := (x_0, y_0, z_0)^T := (1,0,1)^T$ eine glatte Kurve im $\mathbb{R}^3$ bestimmt ist.

b) Prüfen Sie, durch welche der Komponenten x, y oder z sich die Kurve in der Nähe des Punktes P mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen parametrisieren läßt.

c) Bestimmen Sie einen Tangenteneinheitsvektor der Kurve im Punkte P.

Abgabetermin: 24.11.-28.11.2003 (zu Beginn der Übung)