Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2005/06**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x,y) = 4y - 5x$, b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, c) $f(x,y) = 4xy$, d) $f(x,y) = y - x^2$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2x + e^{x+2y}$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Die Gleichung für die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebenengleichung für das gegebene f im Punkt $(x_0,y_0) = (1, -1/2)$.

c) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(0,0)$ läuft.

d) Man berechne den Winkel α zwischen $\operatorname{grad} f(0,0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = y\sqrt{2x^2 + y^2}$.

a) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f .

b) Man überprüfe, ob f eine C^1 -Funktion ist.

c) Man berechne f_{xy} und f_{yx} und bestimme den Definitionsbereich dieser Ableitungen.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion

$$u(x,y,t) = \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/4t}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion

$$u(x,y) = \sin(kx)\cosh(ky)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Abgabetermin: 31.10. - 4.11. (zu Beginn der Übung)