Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2005/06**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Man berechne div $\boldsymbol{f}$ und rot $\boldsymbol{f}$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x, y, z) = (ye^{xy} + z\cos x, xe^{xy} + z^2, \sin x + 2yz)^T \, .$$

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}\,(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (x, -y)^T \, .$$

(i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

(ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 6:

a) Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ die Richtungsableitung im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{2x^2 + 3y^2} & \text{, falls} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x, y) = (0, 0) \, . \end{cases}$$

(i) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

(ii) Man berechne für f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ alle Richtungsableitungen.

(iii) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 7:

Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)
$$\boldsymbol{f}:\ D \subset \mathbb{R}^3 \ \overset{\boldsymbol{f}_1}{\longrightarrow}\ \mathbb{R}^2 \ \overset{\boldsymbol{f}_2}{\longrightarrow}\ \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = rt \\ v = \ln(s+t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ u \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(u(r,s,t), v(r,s,t))\,.$$

b)
$$\boldsymbol{g}:\ ]0,\infty[\ \times\ ]0,\pi/2[\ \overset{\boldsymbol{g}_1}{\longrightarrow}\ \mathbb{R}^2 \ \overset{\boldsymbol{g}_2}{\longrightarrow}\ \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(x(r,t), y(r,t))\,.$$

c)
$$\boldsymbol{h}: \mathbb{R}\backslash\{-1\} \ \overset{\boldsymbol{h}_1}{\longrightarrow}\ \mathbb{R}^2 \ \overset{\boldsymbol{h}_2}{\longrightarrow}\ \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} x = 1/(t^3+1) \\ y = t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ xy^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{h}(x(t), y(t))\,.$$

Aufgabe 8:

Gegeben seien die 'Hyberbelkoordinaten'

$$\boldsymbol{\Phi}\,(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

mit $(u,v) \in D := [0,5] \times [1,3]$.

a) Man berechne $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}\,(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}\,(x,y))$ sowie

b) bzgl. D: $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v)$, $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v)$ und $\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v))$.

c) Man skizziere $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(D)$ im (x,y)-Koordinatensystem.

d) Man transformiere $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ mit Hilfe der Kettenregel in eine Darstellung bzgl. 'Hyberbelkoordinaten'.

Abgabetermin: 14.11. - 18.11. (zu Beginn der Übung)