Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2005/06**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)^T$$

und das Gebiet G, das durch die beiden Kurven $x = y^2$ und $y = x^2$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Mantelfläche

$$M = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\,,\ |z| \leq x + 2 \right\}$$

eines durch zwei Ebenen begrenzten Zylinders.

a) Man zeichne die Ebenen und die begrenzte Mantelfläche M,

b) parametrisiere M und

c) berechne den Flächeninhalt von M mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Hinweis: In b) eignen sich Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 27:

Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1\,,\ x^2+y^2 \le z^2 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = (x^3+yz, y^3+x, z^2)^T\,.$$

a) Man skizziere K und gebe Parametrisierungen für die beiden glatten Flächenstücke D und M an, die K beranden.

b) Man berechne das Volumenintegral $\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z)$, sowie die einzelnen Flüsse von $\boldsymbol{f}$ durch die Flächenstücke D und M. Man bestätige damit für dieses Beispiel den Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 28:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}\,(x,y,z) = (z,x,y)^T$ einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1 \quad \wedge \quad z = x^2 - y^2 \right\}.$$

a) Man zeichne die Fläche F.

b) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken $\displaystyle\int_F \operatorname{rot}\ \boldsymbol{v}\,(\,\boldsymbol{x}\,)\,do\,.$

c) Man berechne die Zirkulation $\displaystyle\oint_{\partial F} \boldsymbol{v}\,(\,\boldsymbol{x}\,)\,d\,\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{v}$ längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.

Abgabetermin: 6.2. - 10.2.2006 (zu Beginn der Übung)