

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

- a) [Klausur 2005] Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x, y) = \sin(x + y) + ye^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ auf und geben Sie eine Abschätzung für das Restglied $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.1$ und $|y| \leq 0.1$ an.

- b) (i) Bestimmen Sie eine Näherung für ein lokales Minimum der Funktion

$$f : \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 8 \cos(x + y) + \sin(x - y) + 12xy + 11x^2 + 8y^2,$$

indem Sie ein Minimum des Taylorpolynoms zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$ berechnen.

- (ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil i), dass der minimale Wert von f auf dem dort angegebenen Definitionsbereich nicht kleiner als 7,5 sein kann.

Hinweis: Für die Bestimmung des Taylorpolynoms in b)i) und die Abschätzung des Fehlers in b)ii) brauchen Sie keine einzige Ableitung genau zu berechnen.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie eine polynomiale Approximation der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = \sin(x_1 + x_2) + \cos(x_1 + \sin(x_2))$, die für alle (x_1, x_2) mit $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 0.1$ betragsmässig höchstens um 0.01 von f abweicht.

Hinweis: Berechnen Sie für die Fehlerabschätzung keine zusätzlichen Ableitungen. Schätzen Sie die Beträge der benötigten Ableitungen ab!

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und prüfen Sie, ob diese Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind:

a) $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy,$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz - \frac{z^4}{2},$ [Klausur 2003]

c) $g(x, y) := \frac{e^{-x^2-y^2}}{1+x^2+y^2}.$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion

$$g : \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) := 2x^3 - 3xy^2.$$

Ermitteln Sie die stationären Punkte von g , prüfen Sie, ob diese Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind, und bestimmen Sie die globalen Maxima und Minima von g .

Abgabetermine: 27.11. – 1.12.2006