Beispiel: Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Für den Einheitskreis $\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$, findet man:

$$\begin{aligned}
\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi
\end{aligned}$$

$\mathbf{f}(x,y)$ ist also nicht wirbelfrei und besitzt folglich auf D auch kein Potential.

Bemerkung:

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld mit Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so folgt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}(\nabla\varphi(\mathbf{x})) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{x} \in D$$

Daraus folgt, dass rot $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ eine **notwendige Bedingung** für die Existenz eines Potentials ist.

Definiert man für ein Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, die **skalare** Rotation

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x,y) := \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

so ist rot $\mathbf{f}(x,y) = 0$ auch in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung.

Die Bedingung

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

ist eine **hinreichende Bedingung**, falls das Gebiet D **einfach zusammenhängend** ist, d.h. keine “Löcher” enthält.

Beispiel:

Wir betrachten wieder das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Berechnet man die Rotation, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{rot}\ \left[\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Rotation von $\mathbf{f}(x,y)$ verschwindet zwar, aber $\mathbf{f}(x,y)$ besitzt auf der Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ kein Potential.

Das Gebiet ist nämlich **nicht** einfach zusammenhängend.

Satz: (Integralsatz von Green)

Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. $K \subset D$ sei kompakt und bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbar. K wird dann von einer geschlossenen, stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet.

Die Parametrisierung sei so gewählt, dass K stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf).

Dann gilt:

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_K \text{rot}\ \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Bemerkung:

Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Bereiche, die sich in endlich viele, bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbare Bereiche zerlegen lassen, in so genannte **Greensche Bereiche**.

Andere Darstellungen des Integralsatzes von Green:

Wir hatten gesehen, dass die Beziehung

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \oint_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet.

Daraus folgt aber mit dem Integralsatz von Green

$$\int_K \text{rot}\, \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld, so ist die durch $\mathbf{f}$ beschriebene Strömung unter der Bedingung rot $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ wirbelfrei, denn

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

ist gerade die Zirkulation von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Andere Darstellungen des Integralsatzes von Green:

Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor $\mathbf{T}$ durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^T$, so folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds &= \oint_{\partial K} (f_1 T_2 - f_2 T_1) ds = \oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \mathbf{T} \right\rangle \, ds \\ &= \int_K \text{rot} \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \, d\mathbf{x} = \int_K \text{div}\, \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

und damit die Beziehung

$$\int_K \text{div}\, \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds$$

Die rechte Seite beschreibt den **Gesamtfluss** der Strömung durch den Rand von K. Gilt also div $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, so ist die Strömung **quellen– und senkenfrei**.

Folgerung: Ist $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, so folgt

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$$

für jede geschlossene stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve, die einen Greenschen Bereich $B \subset D$ vollständig umrandet.

Definition:

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls sich jede geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [a,b] \to D$ stetig innerhalb D auf einen Punkt in D zusammenziehen lässt, d.h. genauer:

Es gibt eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a,b] \times [0,1] \to D$$

mit $\Phi(t,0) = \mathbf{c}(t)$, $\forall\, t \in [a,b]$ und $\Phi(t,1) = \mathbf{x}^0 \in D$, $\forall\, t \in [a,b]$.

Die Abbildung $\Phi(t,s)$ heißt auch **Homotopie**.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential auf D, falls die **Integrabilitätsbedingung**

$$\forall\, \mathbf{x} \in D \;:\; \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T$$

erfüllt ist.

Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \qquad \forall\, j,k$$

Bemerkung: In den Fällen $n = 2, 3$ stimmt die Integrabilitätsbedingung mit der Bedingung

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

überein.

Beispiel:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{r^2} + \sin z \\ \ln r^2 + \dfrac{2y^2}{r^2} + ze^y \\ \dfrac{2yz}{r^2} + e^y + x\cos z \end{pmatrix}$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $r^2 := x^2 + y^2 + z^2$.

Wir wollen untersuchen, ob $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential besitzt und dieses gegebenenfalls bestimmen.

Die Menge $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist offensichtlich **einfach zusammenhängend**.

Weiter gilt:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

Also besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential.

Berechnung des Potentials: Es muss gelten: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$.

Demnach folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f_1 = \frac{2xy}{r^2} + \sin z$$

Durch Integration bezüglich der Variablen x folgt:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y\ln r^2 + x\sin z + c(y,z)$$

mit einer unbekannten Funktion $c(y,z)$.

Einsetzen in die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f_2 = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

ergibt

$$\ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial y} = ze^y$$

und es gilt

$$c(y,z) = ze^y + d(z)$$

Wir haben damit:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + ze^y + d(z)$$

mit der noch unbekannten Funktion $d(z)$.
Die letzte Bedingung lautet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x \cos z$$

Daraus folgt $d'(z) = 0$ und das Potential ist gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + ze^y + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

3.3 Oberflächenintegrale

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u})\ :\ \mathbf{u} \in D\}$$

eine **Fläche** bzw. ein **Flächenstück**.
Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nannt man eine **Parametrisierung** oder **Parameterdarstellung** der Fläche F.

Beispiel:

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im $\mathbb{R}^3$.
Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K := [1, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H.
Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit linear unabhängig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Beispiel:

Der Graph einer skalaren $\mathcal{C}^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet,
ist eine Fläche.
Eine Parametrisierung ist etwa gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.