Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems

$$\begin{aligned} u' &= u^3 - v^3 \\ v' &= (u+v)(1-v). \end{aligned}$$

b) Untersuchen Sie die stationären Punkte aus (a) auf Stabilität.

c) Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} u' &= 2v^3 - 4uv^2 \\ v' &= -3uv^2 - v^3. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie den stationären Punkt $(0,0)^T$ mit Hilfe einer Ljapunov Funktion der Form $V(u,v) = au^2 + bv^2$ auf Stabilität.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Stationäre Punkte :

$$\begin{aligned} u' = 0 &\implies u = v \\ v' = 0 &\implies v = 1 \text{ oder } u = -v \end{aligned}$$

Damit erhält man die zwei stationären Punkte $P_0 = (0,0)^T$ und $P_1 = (1,1)^T$.

b)

$$Jf(u,v) = \begin{pmatrix} 3u^2 & -3v^2 \\ 1-v & 1-2v-u \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert 3 ist positiv. Der Punkt $(1,1)^T$ ist instabil.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert 1 ist positiv, also ist auch der Punkt $(0,0)^T$ instabil.

c) Mit dem Ansatz $V(u,v) = au^2 + bv^2$ gilt sicher $V(0,0) = 0$.

Mit $\nabla V = (2au, 2bv)^T$ und $f(u,v) = \begin{pmatrix} 2v^3 - 4uv^2 \\ -3uv^2 - v^3 \end{pmatrix}$ folgt

$$S(u,v) := < \nabla V, f >= (4a - 6b)uv^3 - 8au^2v^2 - 2bv^4.$$

Wählt man nun $a, b > 0$ mit $a = 3b/2$, so ist $S(u,v) \leq 0$ für alle (u,v). Außerdem ist $V(u,v) > 0$ für alle $(u,v) \neq (0,0)$. Damit ist eine Ljapunov–Funktion gefunden und der Punkt $(0,0)$ ist gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt.

Aufgabe 2:

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $Y'' - Y' - 6Y = e^{-2t}$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$, mit Hilfe der Laplace Transformation.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= 6u + v \end{aligned}$$

sowie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= 6u + v + e^{-2t}. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 2:

a)

$$\begin{aligned} s^2 y - 1 - sy - 6y &= \frac{1}{s+2} \\ \Longleftrightarrow (s-3)(s+2)y &= 1 + \frac{1}{s+2} \\ \Longleftrightarrow y &= \frac{1}{(s-3)(s+2)} + \frac{1}{(s-3)(s+2)^2} \end{aligned}$$

Die Ansätze

$$\begin{aligned} \frac{a}{s-3} + \frac{b}{s+2} &= \frac{1}{(s-3)(s+2)} \\ \frac{\alpha}{s-3} + \frac{\beta s + \gamma}{(s+2)^2} &= \frac{1}{(s-3)(s+2)^2} \end{aligned}$$

liefern

$$\begin{array}{lll} a = \frac{1}{5} & b = -\frac{1}{5} & \\ \alpha = \frac{1}{25} & \beta = -\frac{1}{25} & \gamma = -\frac{7}{25} \end{array}$$

Also

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{7+s}{(s+2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{(s+2)}\right) + \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{2+s}{(s+2)^2} - \frac{5}{(s+2)^2}\right) \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$Y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right) + \frac{1}{25}(e^{3t} - e^{-2t} - 5te^{-2t})$$

b) Das System kann auf die DGL aus Teil a) zurückgeführt werden. Die Lösung kann dort abgelesen werden. Fundamentalsystem wäre also $(e^{3t}, 3e^{3t})^T, (e^{-2t}, -2e^{-2t})^T$.
Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe ist z. B. $-\frac{1}{5}(te^{-2t}, (1-2t)e^{-2t})$.

Wer Teil a) nicht gelöst hat, sieht hoffentlich, dass man die Lösung des Systems auf die Lösung einer Dgl zweiter Ordnung zurückführen kann. Mann erhält mit $Y := u,\ Y' = v$ die Dgl aus Teil a)

$$Y'' - Y' - 6Y = e^{-2t}.$$

Das charakteristische Polynom hat die Nullstellen -2 und 3 . Damit erhalten wir als allgemeine Lölsung der homogenen Dgl

$$Y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}.$$

Da -2 Nullstelle des Charakteristischen Polynoms ist, kann man für die partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe den Ansatz αte^{-2t} machen und erhält

$$Y_p = -\frac{1}{5}te^{-2t}.$$

Allgemeine Lösong des Systems:

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ (1-2t)e^{-2t}) \end{pmatrix}$$