Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y + \frac{e^t}{y^2} + 3ty' = 0, \qquad y(2) = \left(\frac{-e^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{für } t \geq 2\,.$$

Hinweis: Es gibt einen integrierenden Faktor der Form $m(y)$.

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -5y_1(t) + 3y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -6y_1(t) + 4y_2(t). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Art des stationären Punktes $y^* = (0,0)^T$.

Lösung von Aufgabe 1

a) $\underbrace{y + y^{-2}e^t}_{g} + \underbrace{3t}_{h}\, y' = 0 \qquad y(2) = \left(\frac{-e^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad t \geq 2$

Vorgehen nach Buch A/O:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/g &= \frac{3 - 1 + 2y^{-3}e^t}{y + y^{-2}e^t} \\ &= \frac{2 + 2y^{-3}e^t}{y + y^{-2}e^t} = \frac{2}{y} \end{aligned}$$

Integrierender Faktor $m = m(y)$ erfüllt Dgl:

$$m' = \frac{2}{y}m \qquad \frac{dm}{m} = 2\frac{dy}{y}$$

$$\begin{aligned} \ln(m) &= 2\ln(y) + \hat{c} \\ m &= y^2 \cdot c \qquad \text{wir wählen } c = 1 \end{aligned}$$

Neue Dgl: $y^3 + e^t + 3ty^2y' = 0$ exakt

$$\begin{aligned} \phi_t = y^3 + e^t \quad &\Rightarrow \quad \phi = ty^3 + e^t + \alpha(y) \\ \phi_y = 3ty^2 \quad &\Rightarrow \quad \phi = ty^3 + \beta(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lösungen erfüllen $ty^3 + e^t = C$

$$y^3 = \frac{C - e^t}{t}$$

$$(y(2))^3 = \frac{-e^2}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\boxed{y = \left(-\frac{e^t}{t}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Alternativ: Bernoulli $\alpha = -2 \;\; u = y^3$

$$u' + 3au = -3b$$

$$y' + \underbrace{\frac{1}{3t}}_{a}\, y + \underbrace{\frac{e^t}{3t}}_{b}\, y^{-2} = 0$$

$$u' + \frac{1}{t}\, u = -\frac{e^t}{t}$$

$$u_h' = -\frac{1}{t}\, u_h \quad \Rightarrow \quad u_h = t^{-1} \cdot c$$

$$u_p := c(t)t^{-1} \qquad \begin{array}{rcl} c'(t) & = & -e^t \\ c(t) & = & -e^t \end{array}$$

$$u_p = -\frac{e^t}{t}$$

$$u = \frac{c - e^t}{t}\,, \qquad y = \left(\frac{c - e^t}{t}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wie oben sieht man $c = 0$.

b) $f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5y_1 + 3y_2 \\ -6y_1 + 4y_2 \end{pmatrix}$

$$J(f)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} p(\lambda) & = & (-5-\lambda)\,(4-\lambda) + 18 \\ & = & \lambda^2 + \lambda - 2 \\ \lambda & = & -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Re(\lambda_1) > 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{instabiler Sattelpunkt}\,.$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v\\ \dot{v} &= w\\ \dot{w} &= 2u - v + 2w.\end{aligned}$$

b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$u(0) = 0,\ v(0) = 1,\ w(0) = 5.$$

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems aus a) mit der Inhomogenität $h(t) = (0, 0, e^t)$.

Hinweise:

- Die Verwendung eines geeigneten Ansatzes für eine spezielle Lösung der inhomogenen Aufgabe erspart viel Arbeit.
- Falls Sie keinen speziellen Ansatz verwenden, könnten die folgenden Integrale auftreten:

$$\int e^t \sin t \, dt = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t) e^t$$

$$\int e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2} (\sin t + \cos t) e^t$$

Lösung von Aufgabe 2

a) Das System entspricht der Dgl

$$y''' = 2y - y' + 2y'' \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= \lambda^2(\lambda - 2) + (\lambda - 2) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$

reelles Fundamentalsystem der Dgl $e^{2t}, \cos t, \sin t$

reelles Fundamentalsystem des Systems

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & \cos t & \sin t \\ 2e^{2t} & -\sin t & \cos t \\ 4e^{2t} & -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} =: Y(t)$$

b) AWA $u(0) = 0 \quad v(0) = 1 \quad w(0) = 5$

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \tag{1}$$

$$v(0) = y'(0) = 1 \Rightarrow \quad 2c_1 + c_3 = 1$$

$$w(0) = y''(0) = 5 \Rightarrow \quad 4c_1 - c_2 = 5 \tag{3}$$

Addition von (**??**) und (**??**) liefert $\boxed{c_1 = 1}$

damit $\boxed{c_2 = -1 \quad c_3 = -1}$

$y = e^{2t} - (\cos t + \sin t)$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \cos t - \sin t \\ 2e^{2t} + \sin t - \cos t \\ 4e^{2t} + \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

c) $y_p = \alpha e^t$ in Dgl.

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = e^t$$

liefert

$$\alpha e^t (1 - 2 + 1 - 2) e^t = -2\alpha e^t = e^t \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y_p = -\frac{e^t}{2}}$$

Damit erhält man als allg. Lösung des inhomogenen Systems:

$$\begin{aligned} u &= c_1 e^{2t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{e^t}{2} \\ v &= 2c_1 e^{2t} - c_2 \sin t + c_3 \cos t - \frac{e^t}{2} \\ w &= 4c_1 e^{2t} - c_2 \cos t - c_3 \sin t - \frac{e^t}{2} \end{aligned}$$