Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2004/05**
Prof. Dr. H. J. Oberle

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 20:

a) Bestimmen Sie eine C^1–Funktion $y_0 \in \mathrm{C}^1[0,9]$ mit $y_0(1) = y_0(9) = 3$, die das Funktional

$$I[y] := \int_1^9 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\, dt$$

minimiert und berechnen Sie den minimalen Wert des Zielfunktionals.

b) Welche Lösung erhält man, wenn die Randbedingung $y_0(9) = 3$ weggelassen wird? Wie lautet nun der minimale Wert des Zielfunktionals?

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Variationsaufgabe

Minimiere $\quad I[y] = \int\limits_0^1 \frac{(y'(t))^2}{2} - y(t)\, dt$

unter der Nebenbedingung $y(0) = \alpha$.

a) Stellen Sie die Euler–Lagrange Gleichung des Variationsproblems auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Bestimmen Sie die Lösung y_0 der in a) erhaltene Randwertaufgabe.

c) Zeigen Sie durch direkte Auswertung von $I[y_0+\eta] - I[y_0]$ mit $\eta \in C^1[0,1]$ und $\eta(0) = 0$, dass y_0 zugleich die Variationsaufgabe löst.

Aufgabe 22:

Bestimmen Sie die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) - \frac{2}{t}\, y'(t) + \frac{2}{t^2}\, y(t) &= h(t), \quad 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 0, \quad y(2) - y'(2) &= 0 \end{aligned}$$

und lösen Sie hiermit die Randwertaufgabe für $h(t) := t$.

Hinweis: Die homogene Differentialgleichung besitzt polynomiale Lösungen.

Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des linearen Randwertproblems

$$y''(t) \;=\; \lambda\, y(t)/t^2, \qquad y(1) \;=\; y(2) \;=\; 0.$$

Hinweise: Die Differentialgleichung besitzt polynomiale Lösungen,
$t^{\alpha+i\beta} \;=\; t^\alpha\,(\cos(\beta\,\ln t) \;+\; i\,\sin(\beta\,\ln t))$.

Abgabetermine: 24.01. – 28.01.2005 **vor** der Übung.