Aufgabe 1)

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1'(t) & = & -2x_1(t) & + & 3x_2(t) & + & 8t & + & 3 \\ x_2'(t) & = & 10x_1(t) & - & 3x_2(t) & - & 16t & - & 6 \end{array}$$

$$2x_1(0) + x_2(0) \;=\; \alpha, \quad x_1(1) - x_2(1) \;=\; \beta\,, \qquad \alpha, \beta \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

a) Formulieren Sie die Randwertaufgabe in Matrixschreibweise.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems mit Hilfe des Ansatzes

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} \qquad a,\, b,\, c,\, d \,\in \mathbb{R}.$$

d) Zeigen Sie, dass die Randwertaufgabe für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 2)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Hilfe eines integrierenden Faktors von der Form $m = m(t)$

$$2t^2 + 2ty^2 + 1 + 2yy' = 0.$$

Hinweis: Das gesuchte Potential hat die Gestalt $\Phi(t, y) \;=\; (p(t) + q(y))\, e^{t^2}, p\,, q$ Polynome.