

## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6

#### Aufgabe 21:

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 7y_1 + 4y_3, & y_1(0) - y_1(b) &= 5, \\ \dot{y}_2 &= 8y_1 + 3y_2 + 8y_3, & y_2(0) + 2y_2(b) &= 1, \\ \dot{y}_3 &= -8y_1 - 5y_3, & y_3(0) - y_3(b) &= 2. \end{aligned}$$

- Man gebe die Aufgabe in Matrixschreibweise an und bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.
- Man bestimme alle  $b \in \mathbb{R}$ , für die die Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist und gebe im Falle der nichteindeutigen Lösbarkeit alle Lösungen an!

#### Aufgabe 22:

Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^1 y^2 + (y')^2 - yy' dt$$

für alle  $C^1$ -Funktionen  $y$  mit  $y(0) = 1$ .

- Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,
- bestimme die natürliche Randbedingung und
- löse die zugehörige Randwertaufgabe.
- Zur Berechnung verwende man alternativ die Hamilton-Funktion.

**Aufgabe 23:**

Man bestimme alle Lösungen der folgenden Randwertaufgaben:

a)  $y'' + y = 1 + x^2$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi) = -1$ ,

b)  $y'' + y = 1 + x^2$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi) + y'(\pi) = 0$ ,

c)  $y'' + y = 1 + x^2$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi) = \pi^2 - 3$ .

**Aufgabe 24:**

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$-y'' + 5y = \lambda y \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(3) = 0.$$

**Abgabetermin:** 30.01. - 3.02. (zu Beginn der Übung)