Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1: Bitte Bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w” (für wahr) oder ,,f” für falsch ein. Für jeden vollständig richtig bewerteten Aufgabenteil (von 1a)i) bis 1)a)vi) bzw. 1)b)i) bis 1)b)iv)) erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Teilaufgabe wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Teilaufgaben gehen nicht in die Wertung ein.

a) (i) Die Differentialgleichung $(1+e^{2x})y' = -2e^{2x}y$ ist

☐ linear. ☐ Bernoullisch. ☐ separierbar. ☐ eine Ähnlichkeitsdgl.

(ii) Die Differentialgleichung $y' + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$ ist

☐ linear ☐ eine Ähnlichkeitsdgl. ☐ Bernoullisch. ☐ Riccatisch.

(iii) $y - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}y' = 0$

☐ linear ☐ Riccatisch ☐ Bernoullisch ☐ separierbar

(iv) Zur Lösung der Differentialgleichung $y' = 2x(2x^2y^2-1)y$ substituiert man

☐ $u = y^{-2}$ ☐ $u = \frac{y}{x}$ ☐ $u = \frac{1}{y-y_p}$ mit geeignetem y_p

(v) Zur Lösung der Differentialgleichung $y - xy' = \dfrac{x^3}{y^2}$ substituiert man

☐ $u = \frac{y}{x}$ ☐ $u = y^3$ ☐ nicht, da direkt lösbar.

(vi) Zur Lösung der Differentialgleichung $\cos(x)y' + \sin(x)y = -\cos^2(x)y$ substituiert man

☐ $z = \cos(x)$ ☐ $u = \frac{y}{x}$ ☐ nicht, da direkt lösbar.

b) Die Differentialgleichung $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = a\cos(\omega t)$ beschreibt ein mechanisches Schwingungssystem ($m =$ Masse, $k =$ Federkonstante, $c =$ Dämpfungsfaktor).

☐ Die Differentialgleichung ist autonom.

☐ Es handelt sich um eine Anfangswertaufgabe.

☐ Es handelt sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

☐ Die Differentialgleichung kann mit geeigneten Konstanten A, K, C auf das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen aus den Aufgaben 1a) (i) bis (v).

Aufgabe 3:

a) Leiten Sie die im Buch (Ansorge, Oberle) auf Seite 139 angegebene Lösung

$$N(t) = \frac{kN_0}{N_0 + (k - N_0)\exp(-\lambda k(t - t_0))}$$

für die logistische Wachstumsgleichung

$$N'(t) = \lambda N(t)(k - N(t))$$

her.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = 1 - x + x^2 + y - 2xy + y^2$.

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung.

Aufgabe 4:

Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes. In der ersten Übungswoche haben wir mit den Bezeichnungen

$V :=$ Volumen $\quad K :=$ Sättigungskonzentration

$K_0 :=$ Anfangskonzentration $\quad S(t) :=$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt t

$S_0 := S(0) =$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt Null (Anfangswert)

$K_0 + \dfrac{S_0 - S(t)}{V} :=$ Konzentration des Stoffes S zum Zeitpunkt t

$C := K - K_0 - \dfrac{S_0}{V}$

die Differentialgleichung $\quad S'(t) = -d \cdot S(t)\left(C + \dfrac{S(t)}{V}\right)$

zur Beschreibung des Auflösungsprozesses hergeleitet. Seien nun

$S_0 = 10$ kg, $V = 100$ lit, $K = 0.25$ kg/lit, $K_0 = 0$, $d = 4$.

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe indem Sie die Differentialgleichung

(i) als Bernoullische Differentialgleichung behandeln,

(ii) direkt, als separierbare Differentialgleichung lösen.

b) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe des Matlab–Befehls ode45 numerisch. Informieren Sie sich mit Hilfe des Befehls

```
>> help ode45
```

Vergleichen Sie graphisch Ihre exakte Lösung mit der von Matlab gelieferten Lösung.

Abgabetermine: 06.11-10.11.2006