Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2001**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5: Mit Hilfe der stereographischen Projektion $P : S^2 \to \mathbb{C}^*$ erklären wir als sphärische Distanz $d(z,w)$ zweier Punkte $z,w \in \mathbb{C}^*$ den euklidischen Abstand von $P^{-1}(z)$ und $P^{-1}(w)$ in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Man zeige für $z,w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} d(z,w) &= \frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}} \\ d(z,\infty) &= \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Für die sphärische Distanz zweier Punkte $z,w \in \mathbb{C}^*$ beweise man

$$d\left(\frac{1}{z},\frac{1}{w}\right) = d(z,w)$$

Aufgabe 7: Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$w = T(z) := \frac{z+i}{z+1+i}$$

eine Möbius–Transformation ist. Berechnen Sie die Fixpunkte von T, die Umkehrabbildung T^{-1} sowie die Urbilder von $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ und $w_3 = \infty$. Bestimmen Sie weiter das Bild der linken Halbebene und des Einheitskreises (mit Skizze).

Aufgabe 8:

a) Berechnen Sie die Möbius–Transformation $w = T(z)$ mit $T(1) = -i$, $T(2) = 2$ und $T(3) = i$. Bestimmen Sie das Bild der Koordinatenachsen und des Kreises $|z| = 2$.

b) Berechnen Sie alle Abbildungen der Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $f(0) = -i$ und $f(1) = i$. Welche der Abbildungen sind Möbius–Transformationen?

Abgabetermin: Montag (!), 30.4.2001