Komplexe Funktionen vom 19.02.2002

Aufgabe 1:

a) In $\mathbb{C}$ berechne man alle Lösungen von $\sin z = 2$.

b) Man überprüfe (mit Begründung), welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{C}$ holomorph sind:

$$f(z) = \sin(\text{Re } z)\ , \quad g(z) = \text{Re }(\sin z)\ , \quad h(z) = \text{Im }(\sin(\text{Re } z))\ .$$

c) Für die Kurven $c_1(t) = it$ mit $-1 \leq t \leq 1$ und $c_2(t) = 2\cos t + i \sin t$ mit $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ berechne man

$$\int\limits_{c_i} \frac{1}{(z-1)^2}\, dz \quad \text{für} \quad i = 1, 2.$$

d) Man berechne (i) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\, dz$ und (ii) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\, dz$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^4 + 4}\ .$$

a) Man berechne alle Singularitäten z_k von f und klassifiziere sie.

b) Man bestimme die Residuen von f an allen Polstellen.

c) Die zu f gehörige und an den hebbaren Singularitäten stetig ergänzte Funktion lautet:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}\ .$$

Man berechne die komplexe Partialbruchzerlegung von $\tilde{f}$.

d) Man berechne die Laurentreihenentwicklung von $\tilde{f}$ um $z_0 = 0$, die für $z^* = i/3$ konvergiert.

e) Unter Verwendung des Residuenkalküls, d.h. ohne Verwendung einer Stammfunktion, berechne man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx\ .$$