Komplexe Funktionen, WS02, 19.02.2003, (Oberle)

Aufgabe 1:

a) Man bestimme alle komplexen Lösungen z der Gleichung $\cos z = 2$.

b) Man bestimme explizit eine Folge $z_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ und $\exp(1/z_k) = e$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Bei der Konstruktion setze man zunächst $w_k := 1/z_k$ und löse $\exp(w_k) = e$.

c) Für die Kurven $c_1(t) = e^{it}$ und $c_2(t) = 4\cos t + i \sin t$ mit $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ sind die Integrale

$$I_k := \int_{c_k} \frac{dz}{z-2}\,, \qquad k = 1, 2$$

zu berechnen. Man berechne I_2 direkt mit einer Stammfunktion (Definitionsbereich der Stammfunktion angeben) und I_1 hieraus mittels Cauchyscher Integralformel.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{4z + 4i}{(2z-4)(z^2 + (1+i)z + i)}\,.$$

a) Man klassifiziere alle Singularitäten von f.

b) Man berechne $\mathrm{Res}(f; z_k)$ an allen Polstellen z_k von f.

c) Man bestimme $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} f(z)\,dz$.

d) Man gebe die Partialbruchzerlegung an für

$$\tilde{f}(z) = \frac{2}{z^2 - z - 2}$$

e) Man berechne $\displaystyle\int_c \frac{2}{z^2 - z - 2}\,dz$ mit $c(t) = t + i$ für $0 \leq t \leq 1$.