Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1: (Henrici/Jeltsch, Seite 82)

a) Bei der Möbius–Transformation

$$T : z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

gehe der Mittelpunkt eines Kreises C in den Mittelpunkt des Bildkreises C' über. Zeigen Sie, dass dann $c = 0$ gelten muss, d.h., dass T eine lineare Abbildung sein muss.

b) Eine Möbius–Transformation bilde den Einheitskreis auf einen Kreis C und den Punkt $1+i$ auf den Mittelpunkt von C ab. Welches ist das Urbild des Punktes ∞?

Aufgabe 2: (alte Klausuraufgabe)

Gegeben sei die Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{1-z}{1+z}.$$

a) Man zeige, dass T eine Möbius-Transformation ist und bestimme die inverse Transformation.

b) In welche Kurven werden die x-Achse, d.h. Im $z = 0$, und die y-Achse, d.h. Re $(z) = 0$, abgebildet? Skizze!

c) Das Bild der Winkelhalbierenden $y = x$ ist ein Kreis $|w - w_0| = \rho$. Man bestimme Mittelpunkt w_0 und Radius ρ.

d) Man skizziere das Bild der Winkelbereiche $\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2$ und $5\pi/4 \leq \arg z \leq 3\pi/2$ unter der Transformation $w = T(z)$.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie eine Möbius–Tranformation $T : z \to w$ mit $T(2i) = 0$, $T(-2i) = \infty$, $T(0) = 1$.

b) Welches sind die Bilder von

(i) $i\mathbb{R}$,

(ii) $\mathbb{R}$,

(iii) $|z| = 2$,

(iv) $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y > 0\}$

(v) $|z| \leq 8$?

Aufgabe 4:

a) Sei f eine analytische Funktion mit konstantem Realteil. Wie sieht der Imaginärteil von f aus? Tip: Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen.

b) Sei nun f analytisch mit Realteil $u(x+iy) = x^2 - y^2$. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil v von f bis auf eine Konstante bestimmt ist. Geben Sie f als Funktion von $z = x + iy$ an.

c) Seien u und v Lösungen der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen: $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$. Zeigen Sie, dass u und v die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ bzw. $\Delta v = 0$ lösen.

d) Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten in Polarkoordinaten

$$r u_r = v_\varphi\,, \quad r v_r = -u_\varphi.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Prüfen Sie für welche $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{Log}(r^n) + i\varphi$$

holomorph ist. Um welche bekannte(n) Funktion(en) handelt es sich dann?

Abgabetermin: 13.05.03