Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich das Gebiet $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$
  (i) mittels einer Möbiustransformation
  (ii) mittels einer konformen Abbildung

  auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

c) Die Abbildungsvorschrift $f:\ z \to e^{i\dfrac{\pi}{4}}\bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. Wo ist f differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit der Aussage, dass konforme Abbildungen nur durch analytische Funktionen vermittelt werden?

Aufgabe 2:

Transformieren Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\,,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0\,,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

bijektiv und holomorph auf das Innere des Einheitskreises.

Warum geht es nicht mit z^4 ?

Tip: Reihenfolge: Halbkreis, Viertelebene, Halbebene, Vollkreis.

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Kreisscheiben K_1 und K_2 mit Radius 1 um die Mittelpunkte i bzw. $-i$. Die Kreisscheibe K_1 möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe K_2 ein elektrostatisches Potential von 1 haben. Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert. Bestimmen sie das induzierte elektrostatische Potential außerhalb der Kreisscheiben.

Tip: Bilden Sie die Kreise auf parallele Geraden ab.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die folgenden Integrale und skizzieren Sie jeweils die angegebenen Kurven:

a) $\displaystyle\int_{C_1} |z|\, dz$

C_1 : der in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Halbkreis
$|z| = r,\ \mathrm{Re}\,(z) \geq 0\,,$

b) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz$, C_1 wie oben

c) $\displaystyle\int_{C_2} (\overline{z})^2\, dz$ C_2 : geradlinige Verbindung zwischen ir und $-ir$,

d) $\displaystyle\int_{C_3} \cos z\, dz$ für $C_3(t) = it$ mit $0 \leq t \leq 1$

Abgabetermin: 27.05.03