

Aufgabe 1

- a) Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation $T : z \rightarrow w$ mit $T(1) = 0$, $T(0) = \infty$, $T(2) = \frac{1}{2}$.
- b) Welches sind die Bilder von
- (i) der reellen Achse,
 - (ii) der imaginären Achse,
 - (iii) des Einheitskreises $|z| = 1$?
- c) Bestimmen Sie das Urbild von $|w| = 1$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z^2 + iz}{(z^2 + 1)(z + 2i)}.$$

- a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Singularitäten der Funktion f .
- b) Berechnen Sie die Residuen der Funktion f in allen isolierten Singularitäten.
- c) Bestimmen Sie die komplexe Partialbruchzerlegung der Funktion

$$g(z) = \frac{z}{(z - i)(z + 2i)}.$$

- d) Welche Werte nehmen die folgenden Integrale an, wenn die angegebenen Kurven ein Mal im mathematisch positivem Sinne durchlaufen werden?

$$\int_{|z-1|=1} f(z) dz, \quad \int_{|z|=3} f(z) dz$$

- e) Bestimmen Sie diejenige Laurentreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = i$, die in $z^* = -i$ gegen $g(-i)$ konvergiert.