Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2004**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi\,, \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige, dass $\ln z = \ln r + i\varphi$ für $-\pi < \varphi < \pi$ und $r > 0$ holomorph ist.

Aufgabe 14:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c 1 + z^2\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-(1+i)$ nach $1+i$,

b) $\displaystyle\int_c z\sin z\,dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{\ln z}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert),

d) $\displaystyle\int_{-i}^{i} z\ln z\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 15:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{e^z}{(z+i)^5}dz, \quad c_1 : |z+i| = 1, \quad c_2 : |z-2| = 2$

b) $\displaystyle\oint_{c} \frac{z^2+1}{z^3-z^2+z-1}dz, \quad c : \left|z-\frac{1}{2}\right| = 1,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{(\sin z)^2}{z^3}dz, \quad c_1 : |z-1| = 0.9, \quad c_2 : |z-1| = 1.1,$

d) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z+i}{z^2+z-6}dz, \quad c_1 : |z-1| = 2, \quad c_2 : |z+4| = 3,$

e) $\displaystyle\oint_{c} \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) dz, \quad c : |z| = 1,$

f) $\displaystyle\oint_{c} \frac{\cos z}{(z+\pi i)^{2n+1}}dz, \quad c : |z| = 2\pi.$

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^3}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2-6z+10}\,, \quad z_0 = i$ und $z_0 = 0\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{z}{e^z+1}\,, \quad z_0 = \pi(1+8i)\,,$

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{\ln(z-1)}\,, \quad z_0 = 3$ und $z_0 = \frac{5}{4}\,.$

Abgabetermin: 15.6.2004