Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2005**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

a) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} |z|\, dz,$ C_1 : geradliniger Weg von -1 nach 1, C_2 : Halbkreis mit Radius 1 um Null, von 1 nach -1 in mathematisch positiver Richtung

b) $\displaystyle\int_C (1+z)\, dz,$ $C := \cos t + 3i \sin t,\ t \in [-\pi, 0]$ (Halbellipse)

c) $\displaystyle\int_C (\overline{z})^2\, dz,$ C : geradliniger Weg von $1+i$ nach $-1-i$,

d) $\displaystyle\int_C z \sin z\, dz,$ $C(\varphi) = 2e^{i\pi\varphi},\ \varphi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

e) $\displaystyle\int_C e^{3z}\, dz,$ C : Das Stück der Parabel $\mathrm{Im}\,(z) = \pi\,(\mathrm{Re}\,(z))^2$ welches die Punkte Null und $1+i\pi$ verbindet.

Aufgabe 2:

Sei C der mathematisch positiv orientierte Rand (d.h. die Randkurve wird so durchlaufen, dass das Gebiet links liegt) des Gebietes $R := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.

Berechnen Sie : $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}\,(z)\, dz$ und $\displaystyle\int_C z^2\, dz.$.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^z}{z}\,dz \qquad k = 1, 2 \quad C_1 : |z| = 1, \quad C_2 : |z-2| = 1,$

b) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+1}{(z^3-z^2+z-1)}\,dz \qquad C : |z-0.5| = 1,$

c) $\displaystyle\int_C \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,dz \qquad C : |z| = 1,$

d) $\displaystyle\int_C \frac{z+2i}{(z^2-2z-3)}\,dz \qquad C : |z-i| = 2,$

e) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(e^z-i)}\,dz \qquad C : |z| = 1,$

Aufgabe 4:

Sei C eine einfach geschlossene (d.h. außer im Anfangs– und Endpunkt gilt $C(t_1) = C(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$) stückweise C^1– Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int_C \frac{z}{z^2+1}\,dz$$

definiert?

Welche Werte kann das Integral dann annehmen?

Fertigen Sie für jeden möglichen Wert eine Skizze an.

Abgabetermin: 31.05.05