Aufgabe 1)

Eine Funktion $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ sei gegeben durch $T(z) = \dfrac{3z - i}{iz - 1}$.

a) Warum ist T eine Möbius-Transformation?

b) Welche verallgemeinerten Kreise werden durch T auf Geraden abgebildet?

c) Welches ist das Bild der imaginären Achse?

d) Welches ist das Bild der reellen Achse?

e) Wie sieht dann die Bildmenge von

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

unter T aus? Zeichnen Sie dazu eine Skizze!

Aufgabe 2)

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(z) = \frac{2z^2 - 3iz + 2}{(4z^2 + 1)\,(z^2 + 4)} \,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f .

b) Berechnen Sie die Residuen in allen isolierten Singularitäten von f .

c) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{(2z - i)(z + 2i)}$$

an.

d) Berechnen Sie diejenige Laurent–Reihe von $\tilde{f}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die für $z^* = 1$ gegen $f(1)$ konvergiert.