Komplexe Funktionen, WS06/07, 21.02.2007, (Lauterbach)

Aufgabe 1:

a) (i) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| = 1\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

(ii) Für die Möbius-Transformation

$$T(z) = \frac{z - \sqrt{3}}{z + \sqrt{3}}$$

entscheide man für die Bilder von K_1, K_2 und der reellen Achse, ob es sich um echte Kreise oder Geraden handelt und bestimme ggf. Radien und Mittelpunkte.

(iii) Man berechne die Umkehrfunktion von T.

b) Man überprüfe, ob

(i) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$ harmonisch ist,

(ii) $f(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \mathrm{Im}(z) - 3i$ holomorph ist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{\exp(z-2) - 1}{z^2 + z - 6}$ definierte Funktion.

a) Man bestimme und klassifiziere alle Singularitäten von f.

b) Man berechne die Residuen für alle Polstellen von f.

c) Für die Potenzreihenentwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ gebe man die ersten drei nicht verschwindenden Glieder an.

d) Für die Laurentreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_1 = -3$ bestimme man den Hauptteil.

e) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z+2|=2} f(z)\, dz$.

f) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z+1|=1} f(z)\, dz$.