

28. Internationaler Mathematik-Städtewettbewerb, 29. März 2007

MITTELSTUFE

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Zeichne, ohne abzusetzen, fünf gerade Linien so, dass ein fünfzackiger Stern entsteht. Dieser Stern besteht dann aus fünf Dreiecken und einem Fünfeck.

Es stellt sich nun heraus, dass alle fünf Dreiecke kongruent sind. Muss dann das Fünfeck regelmäßig sein (d.h. gleich lange Seiten und gleiche Winkel haben)?

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Zwei 2007-stellige Zahlen werden auf eine Tafel geschrieben. Es ist bekannt, dass man bei jeder der beiden Zahlen so 7 Ziffern wegstreichen kann, dass sich zwei gleiche Zahlen ergeben. Beweise, dass man dann auch zu den beiden ursprünglichen Zahlen jeweils 7 Ziffern hinzufügen kann, um zwei gleiche Zahlen zu erhalten.

Aufgabe 3: [4 Punkte]

Wie viele Türme muss man auf einem 8×8 -Schachbrett mindestens platzieren, um alle weißen Felder zu bedrohen? (Ein Feld wird von einem Turm genau dann bedroht, wenn es in der gleichen Zeile oder Spalte liegt.)

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Es seien drei reelle Zahlen $\neq 0$ gegeben, (z.B. a, b, c). Setzt man sie in beliebiger Reihenfolge als Koeffizienten eines quadratischen Polynoms ein (z.B. $ax^2 + bx + c$ oder $bx^2 + cx + a$), so habe jedes dieser Polynome eine reelle Nullstelle.

Ist es dann wahr, dass jedes dieser Polynome eine positive Nullstelle hat?

Aufgabe 5:

a) [1 Punkt] Eine Pizza habe die Form eines Dreiecks, bei dem ein Winkel dreimal so groß ist wie ein anderer Winkel. Die Pizza soll nun in einen dreieckigen Karton gesteckt werden. Allerdings geht das Karton-Dreieck aus dem Pizza-Dreieck durch eine Spiegelung längs einer Geraden hervor. Wie kann man die Pizza so in zwei Teile zerschneiden, dass sie überschneidungsfrei und ohne Umdrehen in den Karton passen?

b) [4 Punkte] Gleiches Problem wie in a), nur dass jetzt das Pizza-Dreieck stumpfwinklig ist, wobei der stumpfe Winkel doppelt so groß ist wie einer der anderen Winkel.

Alle Aussagen und Feststellungen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen!

An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg !