M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Es sei eine Gerade in der Ebene gegeben, außerdem hat man eine (kreisrunde) Münze zur Hand. Es sollen nun zwei Punkte konstruiert werden, deren Verbindungsgerade senkrecht zur vorgegebenen Geraden verläuft. Hierbei ist folgende Operation erlaubt: Man markiert einen oder zwei Punkte, legt die Münze so in die Ebene, dass der Punkt beziehungsweise die Punkte auf ihrem Rand liegen (sofern ihr Abstand kleiner ist als der Durchmesser der Münze), und zeichnet den Rand der Münze auf die Ebene. Es ist nicht möglich, die Münze so an die vorgegebene Gerade zu legen, dass die Gerade eine Tangente des Münzrandes bildet.

Aufgabe 2 (5 P.)**.** Pete kann auf jeder beliebigen Strecke den Mittelpunkt markieren. Zudem kann er für jede positive ganze Zahl n einen Punkt markieren, der eine Strecke in zwei Teile mit dem Längenverhältnis $n : (n + 1)$ teilt. Er behauptet, dass er dadurch die Strecke in jedes vorgegebene rationale Verhältnis teilen kann. Hat er Recht?

Aufgabe 3 (8 P.)**.** Auf einer Rundstrecke starten 10 Radfahrer gleichzeitig vom gleichen Punkt aus in die gleiche Richtung. Jeder Radfahrer fährt ein konstantes Tempo, aber keine zwei fahren das gleiche Tempo. Befinden sich zu irgendeinem Zeitpunkt zwei Radfahrer wieder am gleichen Punkt, nennen wir dies eine *Begegnung*. Bis zum Mittag ist jeder Radfahrer jedem anderen mindestens einmal begegnet, aber niemals zweien oder mehr gleichzeitig. Zeige, dass jeder Radfahrer bis zum Mittag mindestens 25 Begegnungen hatte.

Aufgabe 4 (8 P.)**.** Ein Rechteck, das aus quadratischen Feldern besteht, ist in irgendeiner Weise in „Dominosteine“ unterteilt, also in Rechtecke von 1×2 Feldern. In jeden Dominostein wird eine Diagonale eingezeichnet. Hierbei dürfen keine zwei Diagonalen den gleichen Endpunkt haben. Zeige, dass dann stets genau zwei Ecken des Rechtecks Endpunkte von Diagonalen sind.

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Es sei ein beliebiges Fünfeck gegeben. Für jede seiner Seiten teilen wir ihre Länge durch die Summe der Längen aller anderen Seiten und summieren diese Verhältnisse auf. Zeige, dass die Summe stets kleiner als 2 ist.

Aufgabe 6 (8 P.)**.** Im spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ sei BH die Höhe über der Seite AC und P ein beliebiger Punkt auf BH. Außerdem sei A' der Mittelpunkt der Seite BC und C' der Mittelpunkt von AB. Die Senkrechten durch A' auf CP und durch C' auf AP schneiden sich im Punkt K. Zeige, dass $|KA| = |KC|$.

Aufgabe 7 (12 P.)**.** An einem runden Tisch halten N Ritter ihre täglichen Versammlungen ab. Der Zauberer Merlin bestimmt dabei ihre Reihenfolge. Vom zweiten Tag an dürfen die Ritter ihre Reihenfolge während der Versammlung wie folgt verändern (beliebig oft): Zwei Sitznachbarn dürfen ihre Plätze tauschen, falls sie am ersten Tag keine Nachbarn waren. Die Ritter versuchen, eine Reihenfolge zu erreichen, welche bereits an einem früheren Tag auftrat. Wie viele Tage kann Merlin maximal erzwingen, dass dies nicht geschieht?

(Zwei Reihenfolgen am Tisch werden als gleich angesehen, wenn sie durch eine Drehung des Tisches ineinander überführbar sind. Merlin sitzt nicht mit am Tisch.)

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!

32. Internationaler Städtewettbewerb Mathematik 10. November 2010
Herbstrunde Hamburg

O Oberstufe

Aufgabe 1. In einem Land gebe es genau 100 Städte, die als Punkte in der Ebene aufgefasst werden. In einem Buch ist zu je zwei Städten ihre Entfernung zueinander eingetragen (insgesamt 4950 Einträge).

(a) (2 P.) Irgendein Eintrag wurde entfernt. Ist es stets möglich, ihn anhand der anderen Einträge zu rekonstruieren?

(b) (3 P.) Angenommen, es wurden k Einträge gelöscht und keine drei Städte im Land liegen auf einer gemeinsamen Geraden. Welches ist das größte k, für das man die fehlenden Einträge in jedem Fall rekonstruieren kann?

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Auf einer Rundstrecke starten $2N$ Radfahrer gleichzeitig vom gleichen Punkt aus in die gleiche Richtung. Jeder Radfahrer fährt ein konstantes Tempo, aber keine zwei fahren das gleiche Tempo. Befinden sich zu irgendeinem Zeitpunkt zwei Radfahrer wieder am gleichen Punkt, nennen wir dies eine *Begegnung*. Bis zum Mittag ist jeder Radfahrer jedem anderen mindestens einmal begegnet, aber niemals zweien oder mehr gleichzeitig. Zeige, dass jeder Radfahrer bis zum Mittag mindestens N^2 Begegnungen hatte.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Es sei ein beliebiges Vieleck gegeben. Für jede seiner Seiten teilen wir seine Länge durch die Summe der Längen aller anderen Seiten und summieren diese Verhältnisse auf. Zeige, dass die Summe stets kleiner als 2 ist.

Aufgabe 4. Zwei Zauberer duellieren sich. Zu Beginn fliegen sie in einer Höhe von 100 über dem Meer. Dann wenden sie abwechselnd Zaubersprüche an, wobei jeder Spruch die eigene Höhe um a und die des Gegners um b verringert, mit positiven reellen Zahlen $a < b$ (für jeden Spruch verschieden). Beide Zauberer kennen die gleichen Zaubersprüche und können jeden beliebig oft anwenden. Ein Zauberer gewinnt, wenn er sich irgendwann in einer positiven Höhe befindet, sein Gegner aber nicht. Gibt es eine Menge an bekannten Zaubersprüchen, für die der zweite Zauberer seinen Sieg erzwingen kann und die

(a) (2 P.) endlich ist;

(b) (5 P.) unendlich ist?

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Das Viereck $ABCD$ sei in einen Kreis mit Mittelpunkt O einbeschrieben, so dass seine Diagonalen nicht durch O verlaufen. Der Umkreismittelpunkt von $\triangle AOC$ liege auf der Geraden durch B und D. Zeige, dass dann der Umkreismittelpunkt von $\triangle BOD$ auf der Geraden durch A und C liegt.

Aufgabe 6 (12 P.)**.** Die Einträge einer Tabelle der Größe 1000×1000 seien Einsen und Nullen. Zeige, dass man stets 990 Zeilen löschen kann, so dass in jeder Spalte mindestens eine Eins verbleibt, oder 990 Spalten, so dass in jeder Zeile mindestens eine Null verbleibt.

Aufgabe 7 (14 P.)**.** Das Quadrat $ABCD$ sei in kongruente Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen unterteilt. Die Figur F umfasse genau diejenigen Rechtecke, welche die Diagonale AC treffen. Zeige, dass diese Diagonale die Fläche von F halbiert.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!