

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Von sechs Punkten in der Ebene ist bekannt, dass sie sich in zwei Tripel aufteilen lassen, die jeweils ein Dreieck bilden. Ist es immer möglich, diese Punkte in zwei solche Tripel aufzuteilen, so dass die beiden Dreiecke keinen Punkt gemeinsam haben (weder innen noch auf dem Rand)?

Aufgabe 2 (4 P.). Es sei A eine positive ganze Zahl. Zwei Operationen sind erlaubt: Die Zahl kann um 9 erhöht werden oder eine Ziffer 1 darf an beliebiger Stelle aus der Zahl entfernt werden. Ist es immer möglich, $A + 1$ zu erhalten, indem man diese Operationen einige Male anwendet?

Bemerkung: Wenn eine führende 1 gelöscht wird, werden auch alle führenden Nullen gelöscht.

Aufgabe 3 (4 P.). 11 Gewichte haben eine ganzzahlige Grammanzahl. Keine zwei von ihnen sind gleich. Es ist bekannt, dass, wann immer man alle Gewichte oder eine beliebige Teilmenge auf eine Balkenwaage legt, stets die Seite schwerer ist, auf der die größere Anzahl an Gewichten liegt. Beweise, dass mindestens ein Gewicht schwerer als 35 Gramm sein muss.

Aufgabe 4 (5 P.). Acht Türme sind so auf einem 8×8 -Schachbrett angeordnet, dass sich keine zwei von ihnen bedrohen (Türme greifen waagrecht oder senkrecht an). Die Felder sind wie folgt zwischen den Türmen aufgeteilt: Jeder besitzt sein eigenes Feld. Ein Feld, das von zwei Türmen bedroht wird, gehört dem näheren; falls beide gleich weit entfernt sind, gehört ihnen jeweils das halbe Feld. Beweise, dass jedem Turm die gleiche Fläche des Brettes gehört.

Aufgabe 5 (5 P.). In einem Viereck $ABCD$ sei der Winkel bei B gleich 150° , der bei C ein rechter und die Seiten AB und CD gleich lang. Ermittle den Winkel zwischen BC und der Geraden, welche die Mittelpunkte der Seiten BC und AD miteinander verbindet.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Es sei A eine positive ganze Zahl. Zwei Operationen sind erlaubt: Die Zahl kann um 9 erhöht werden oder eine Ziffer 1 darf von beliebiger Stelle aus der Zahl entfernt werden. Ist es immer möglich, $A + 1$ zu erhalten, indem man diese Operationen einige Male anwendet?

Bemerkung: Wenn eine führende 1 gelöscht wird, werden auch alle führenden Nullen gelöscht.

Aufgabe 2 (4 P.). In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei der Winkel bei C ein rechter. Auf den Katheten AC und BC werden außerhalb des Dreiecks Quadrate $ACKL$ und $CBNM$ konstruiert. Sei CE eine Höhe im Dreieck. Beweise, dass der Winkel $\angle MEL$ ein rechter ist.

Aufgabe 3 (4 P.). Acht Türme sind so auf einem 8×8 -Schachbrett angeordnet, dass sich keine zwei von ihnen bedrohen (Türme greifen waagrecht oder senkrecht an). Die Felder sind wie folgt zwischen den Türmen aufgeteilt: Jeder besitzt sein eigenes Feld. Ein Feld, das von zwei Türmen bedroht wird, gehört dem näheren; falls beide gleich weit entfernt sind, gehört ihnen jeweils das halbe Feld. Beweise, dass jedem Turm die gleiche Fläche des Brettes gehört.

Aufgabe 4 (4 P.). An 100 Steinen zeigen Aufkleber deren wirkliches Gewicht. Keine zwei Steine sind gleich schwer. Der schelmische Greg möchte die Aufkleber so umordnen, dass die Summe der Zahlen einer beliebigen Gruppe von 1 bis 99 Steinen niemals deren wirklichem Gewicht entspricht. Ist dies immer möglich?

Aufgabe 5 (5 P.). Ein quadratisches Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten sei *zulässig*, wenn der erste Koeffizient 1 ist, alle Nullstellen ganzzahlig sind und der Betrag eines Koeffizienten 2013 übersteigt. Basil hat die Summe aller zulässigen Polynome gebildet. Beweise, dass das Ergebnispolynom keine reellen Nullstellen hat.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden.

Viel Erfolg!