

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.). In einer quadratischen Tabelle sind die Hälfte der Einträge Plus(zeichen), die andere Hälfte Minus. Beweise, dass zumindest zwei Zeilen oder zwei Spalten dieselbe Anzahl an Plus enthalten.

Aufgabe 2 (5 P.). Beweise, dass jedes Vieleck, das einen Inkreis besitzt, drei Seiten hat, die ein Dreieck bilden können.

Aufgabe 3 (6 P.). Ist es möglich, alle positiven Teiler von $100!$ (inklusive 1 und $100!$) so in zwei Gruppen aufzuteilen, dass jede Gruppe dieselbe Anzahl an Zahlen hat und das Produkt der Zahlen der ersten Gruppe gleich dem der Zahlen der zweiten Gruppe ist?

Aufgabe 4 (7 P.). An einer kreisförmigen Straße sind in gleichen Abständen (zum jeweiligen Vorgänger und Nachfolger) 25 Polizisten platziert. Jeder Polizist trägt eine Marke mit einer eindeutigen Nummer von 1 bis 25. Die Polizisten bekommen eine Anweisung, so ihre Positionen zu vertauschen, dass ihre Marken entlang der Strecke im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgend von 1 bis 25 nummeriert sind. Beweise: Wenn die Polizisten beim Tauschen alle zusammen eine möglichst geringe Strecke entlang der Straße zurücklegen möchten, dann bleibt mindestens einer an seiner ursprünglichen Position.

Aufgabe 5 (8 P.). In einem rechtwinkligen Dreieck werden zwei Kreise mit gleichen Radien so konstruiert, dass sie sich gegenseitig berühren und jeder die Hypotenuse und je eine Kathete berührt. Seien M und N die Berührungspunkte der Kreise mit der Hypotenuse. Beweise, dass der Mittelpunkt von MN auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels des Dreiecks liegt.

Aufgabe 6 (8 P.). Eine positive ganze Zahl heiße *einfach*, wenn sie nur eine Ziffer enthält – möglicherweise mehrfach (Beispiele: 4, 111, 999999). Beweise, dass jede n -stellige Zahl als Summe von höchstens $n + 1$ einfachen Zahlen geschrieben werden kann.

Aufgabe 7. Ein quadratisches Spinnennetz bestehe aus 100×100 Knotenpunkten (also 99×99 Zellen). 100 Fliegen werden im Netz gefangen, die an 100 (paarweise) verschiedenen Knoten hängen geblieben sind. Eine Spinne startet in einer Ecke des Netzes und bewegt sich jeweils von einem Knotenpunkt zu einem benachbarten, zählt dabei die Züge und frisst jede Fliege, der sie begegnet. Kann die Spinne in jedem Fall alle Fliegen fressen in nicht mehr als

(a) (5 P.) 2100 Zügen bzw.

(b) (5 P.) 2000 Zügen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden.

Viel Erfolg!

