39. Internationaler Städtewettbewerb Mathematik — 26. Februar 2018
Frühjahrsrunde — Hamburg

M Mittelstufe

Aufgabe 1. Sechs Türme stehen auf einem 6×6-(Schach)Brett, so dass sich keine zwei von ihnen bedrohen (Türme greifen waagerecht oder senkrecht an). Jedes unbesetzte Feld ist nach der folgenden Regel gefärbt: Wenn alle Türme, die das Feld bedrohen, gleich weit von diesem Feld entfernt sind, wird das Feld rot gefärbt, anderenfalls blau. Ist es möglich, dass alle unbesetzten Felder gefärbt sind in

(a) (1 P.) rot bzw.

(b) (2 P.) blau?

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Sei K ein Punkt auf der Hypotenuse AB des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ und L ein Punkt auf der Seite AC, so dass $|AK| = |AC|$ und $|BK| = |LC|$ gilt. Sei M der Schnittpunkt der Strecken BL und CK. Beweise, dass das Dreieck $\triangle CLM$ gleichschenklig ist.

Aufgabe 3. In jeder Zelle eines 4×4-Quadrats steht eine ganze Zahl. Die Summe aller Zahlen in jeder Spalte und in jeder Zeile ist gleich. Sieben der Zahlen sind bekannt, die restlichen versteckt (siehe Abbildung). Ist es möglich eindeutig zu bestimmen

1	?	?	2
?	4	5	?
?	6	7	?
3	?	?	?

(a) (2 P.) mindestens eine der versteckten Zahlen bzw.

(b) (2 P.) mindestens zwei der versteckten Zahlen?

Aufgabe 4 (4 P.)**.** Drei natürliche Zahlen sind so beschaffen, dass jede von ihnen durch den größten gemeinsamen Teiler der anderen beiden teilbar ist und dass das kleinste gemeinsame Vielfache von je zweien durch die dritte Zahl teilbar ist. Müssen die drei Zahlen dann in jedem Fall gleich sein?

Aufgabe 5 (5 P.)**.** Dreißig Punkte sind in der Ebene markiert, so dass keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Sieben rote Linien werden gezeichnet, so dass auf ihnen keine der markierten Punkte liegen. Ist es möglich, dass jede Verbindungsstrecke zweier markierter Punkte mindestens eine rote Gerade schneidet?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. — Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Die Winkelhalbierende und die Höhe werden von einem Eckpunkt eines Dreiecks gezeichnet und teilen die gegenüberliegende Seite in drei Strecken. Gibt es Dreiecke, bei denen es möglich ist, aus diesen drei Strecken ein neues Dreieck zu bilden?

Aufgabe 2 (4 P.). Vier natürliche Zahlen sind so beschaffen, dass jede von ihnen durch den größten gemeinsamen Teiler der anderen drei teilbar ist und dass das kleinste gemeinsame Vielfache von je dreien durch die vierte Zahl teilbar ist. Beweise, dass das Produkt dieser vier Zahlen eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 3 (4 P.). Zwei Kreise mit Mittelpunkten O_1 und O_2 berühren sich jeweils außen im Punkt T. Eine gemeinsame Tangente wird gezeichnet, die den ersten Kreis im Punkt A und den zweiten im Punkt B berührt. Die gemeinsame Tangente durch den Punkt T schneidet die Gerade AB im Punkt M. AC sei ein Durchmesser des ersten Kreises. Beweise, dass die Strecken CM und AO_2 senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 4 (5 P.). In der Ecke eines 8×8-Schachbretts liegt ein Chip. Peter und Basil bewegen den Chip abwechselnd. Peter fängt an und bewegt den Chip jeweils wie eine Dame beim Schach (beliebig weit entweder senkrecht, waagerecht oder diagonal), nur das Zielfeld wird bei so einem Zug als *betreten* gewertet. Basil bewegt den Chip jeweils zweimal wie ein König (ein Feld weit entweder senkrecht, waagerecht oder diagonal), beide Felder werden hierbei als *betreten* gewertet. Das ursprüngliche Feld gilt bereits als *betreten*. Der Chip darf auf kein Feld gesetzt werden, dass schon *betreten* worden ist. Der Spieler, der nicht mehr ziehen kann, verliert. Welcher der beiden Jungen kann so spielen, dass er immer gewinnt, unabhängig davon, wie sein Gegner spielt?

Aufgabe 5 (5 P.). An jeder Ecke eines Polyeders berühren sich genau drei Flächen. Jede Fläche dieses Polyeders ist rot, gelb oder blau gefärbt. Die Ecken, an denen sich Flächen aller Farben berühren, werden *vielfarbig* genannt. Beweise, dass die Anzahl der vielfarbigen Ecken gerade ist.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!