Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1. Multiple Choice

(a) Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.

(b) Jede Schülergruppe bekommt zu Beginn 10 Punkte. Bei einer richtigen Antwort wird 1 Punkt hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, wird 1 Punkt abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 20, die niedrigste 0.

(c) Taschenrechner sind nicht zugelassen.

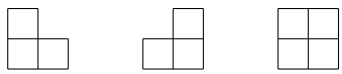
(a) $\frac{2008+2008+2008+2008+2008}{2008+2008} =$

(**A**) 2008 (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) 3 (**D**) $\frac{5}{2}$ (**E**) 10040

(b) Im Zooladen schwimmen in einem Aquarium 6 verschiedene Fische mit einem durchschnittlichen Verkaufspreis von 20 €. Als eines Tages der prächtigste verkauft wird, beträgt der durchschnittliche Preis der restlichen fünf Fische nur noch 18 €. Wie teuer war der verkaufte Fisch?

(**A**) 20 € (**B**) 24 € (**C**) 26 € (**D**) 28 € (**E**) 30 €

(c) Auf einem Tisch werden Würfel zusammengestellt. In den Abbildungen sind drei Ansichten des Körpers dargestellt. Aus wie vielen Würfeln besteht er dann?



Vorderansicht — Seitenansicht — Ansicht von oben

(**A**) aus 3 (**B**) aus 4 (**C**) aus 5 (**D**) aus 6 (**E**) aus 7

(d) An die Tafel sind 4 Geraden gezeichnet worden. Welche der folgenden Zahlen ist gewiss *nicht* die Anzahl der Schnittpunkte, die diese Geraden miteinander haben (auch nicht außerhalb der Tafel)?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

(e) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2007 - 2008 =$

(**A**) 1004 (**B**) -2008 (**C**) -1 (**D**) -1004 (**E**) 2007

(f) Die Masse eines LKW ohne Ladung beträgt 2 t. Als der LKW heute auf Tour geht, machen die geladenen Waren 80 % der Gesamtmasse aus. Wie viel Prozent machen die Waren von der neuen Gesamtmasse aus, nachdem beim ersten Halt ein Viertel der Waren abgeladen wurde?

(**A**) 25 % (**B**) 75 % (**C**) 66 % (**D**) 55 % (**E**) 60 %

(g) Als der Bus heute an der Endstation los fuhr, waren wir insgesamt 44 Fahrgäste. An der 1. Station stiegen 7 aus und 3 ein. Nachdem an der 2. und 3. Station dasselbe passierte, fragte ich mich, an welcher Station – wenn das so weiterginge – nach dem Aus- und Einsteigen die Zahl der Fahrgäste erstmals kleiner als 7 ist. Das ist an der

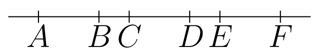
(A) 4. **(B)** 6. **(C)** 7. **(D)** 9. **(E)** 10. Station.

(h) Die Zeichen $\boxtimes$ und $\otimes$ stehen für voneinander verschiedene Ziffern. Es ist bekannt, dass die Summe der nebenstehenden Additionsaufgabe eine 3-stellige Zahl ist. Dann ist der größtmögliche Wert dieser Summe

$$\begin{array}{rr} & \boxtimes\boxtimes\boxtimes \\ + & \otimes\boxtimes \\ + & \boxtimes \\ \hline \end{array}$$

(A) 991 **(B)** 897 **(C)** 889 **(D)** 994 **(E)** 997

(i) Die Punkte $A, \ldots, F$ liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Es gilt $\overline{AD} = \overline{CF}$ und $\overline{BD} = \overline{DF}$. Dann gilt sicher



(A) $\overline{AB} = \overline{CD}$ **(B)** $\overline{AB} = \overline{BC}$ **(C)** $\overline{BC} = \overline{DE}$

(D) $\overline{BD} = \overline{EF}$ **(E)** $\overline{CD} = \overline{EF}$

(j) Stell dir vor, du hast 6 Metallstangen in den Längen 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2006 cm, 2007 cm und 2008 cm. Wie viele verschiedene Dreiecke könntest du daraus legen? *(Bemerkung: Dreiecke werden hier als voneinander verschieden angesehen, wenn sie sich in mindestens einer Seitenlänge voneinander unterscheiden.)*

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 9 **(E)** 20

Die folgenden 3 Aufgaben müssen gut nachvollziehbar gelöst werden. Einzelne Schritte sind zu begründen.

Aufgabe 2. Zahlentheorie (Maximalpunktzahl: 10 Punkte)
Klabautermann, Klabauterfrau und Klabauterkind treiben an Bord eines Containerschiffes ihren Schabernack. Die Container sind von Eins an durchnummeriert. Der Klabautermann macht an jeden vierten Container ein Kreuz, Klabauterfrau an jeden sechsten Container und Klabauterkind an jeden zehnten Container. Der Lademeister erhält den Auftrag, im nächsten Hafen jeden Container mit drei Kreuzen zu entladen.

(a) Wie viele sind das, wenn sich 600 durchnummerierte Container an Bord befinden und die ersten drei Kreuze von der Klabauterfamilie an den Containern mit den Nummern 4, 6 und 10 sind?

(b) Wie viele Container mit drei Kreuzen gibt es, wenn alle Klabauter nach ihrer Regel Kreuze machen, aber das Klabauterkind mit dem Container 1 beginnt?

Aufgabe 3. Kombinatorik (Maximalpunktzahl: 15 Punkte)
Auf dem Schaufelraddampfer *Louisiana Star* findet in der Weihnachtszeit wieder eine spektakuläre Abendfahrt auf der Elbe statt. Es wird eine Dinnershow mit leckerem Essen, Getränken und Gesangseinlagen geboten. Ein Kellner ist bei der guten Stimmung an Bord so beschwingt, dass er vergessen hat, welchen Gästen er die vier Gläser Apfelsaft auf seinem Tablett bringen wollte. An den Tisch kann er sich jedoch noch erinnern. An diesem Tisch sitzen jedoch neun Personen. Er beschließt, die Gläser rein zufällig vor irgendwelche vier Gäste zu platzieren.

(a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er, auf diese Art vier Gäste für die Gläser auszuwählen?

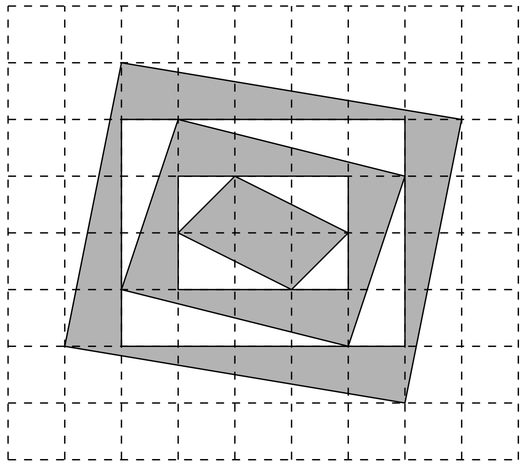
(b) Wie groß ist die Chance (Wahrscheinlichkeit) dafür, dass er die Getränke genau den richtigen Gästen serviert?

Am Nachbartisch ergibt sich ein ähnliches Problem bei der Vorspeise. Dort sitzen zehn Personen auf derselben Seite einer langen Tafel, alle nebeneinander. Genau drei Personen haben eine Fischsuppe bestellt, und der Ober hat wieder vergessen, wer diese drei waren. Er erinnert sich aber daran, dass genau zwei dieser Gäste mit Fischsuppenwunsch (aber nicht alle drei!) nebeneinander sitzen. Er stellt die Vorspeisen wiederum zufällig auf den Tisch, wobei er das berücksichtigt, an was er sich noch erinnert.

(c) Wie viele Möglichkeiten hat er jetzt, drei Gäste für Fischsuppe auszuwählen?

Hinweis: Auch wenn aus dem Unterricht Formeln bekannt sind, reicht es bei dieser Aufgabe nicht, die Formeln zu zitieren und die Werte einzusetzen. Die Ergebnisse sind direkt aus der Aufgabenstellung herzuleiten.

Aufgabe 4. Geometrie/Prozesse (Maximalpunktzahl: 15 Punkte)



(a) Welchen Flächeninhalt hat die innerste grau gefärbte Fläche in der obigen Abbildung? (1 Kästchen sei 1cm breit und 1cm hoch.)

(b) Welchen Flächeninhalt hat die gesamte in der Abbildung grau gefärbte Fläche?

(c) Man kann das Bild als Ergebnis eines mehrfach wiederholten Prozesses auffassen, bei dem immer wieder außen an der bisherigen Figur eine neue graue Fläche angefügt wird. Wie groß ist dann der Inhalt der nächsten dazukommenden Fläche?

(d) Wenn man diesen Prozess weiter durchführt, so befindet sich die gesamte grau gefärbte Fläche immer in einem Rechteck, dessen eine Seite um ein Kästchen größer ist als die andere Seite. Welchen Flächeninhalt hat die entsprechend gebildete gesamte grau gefärbte Fläche, die zu einem Rechteck mit den Seitenlängen n und $(n-1)$ gehört?

Klassenstufen 9, 10

Aufgabe 1. Die Zahl 6 wird aus 3 gleichen Ziffern mit Hilfe der folgenden mathematischen Symbole dargestellt:

$+$	Addition
$-$	Subtraktion
$\cdot$	Multiplikation
$:$	Division
$(\dots)$	Klammern setzen
$\sqrt{\dots}$	zweite Wurzel ziehen
$!$	Fakultät

Gesucht ist jeweils die Möglichkeit mit der kleinsten Punktsumme. Dabei werden die einzelnen Operationen unterschiedlich gewichtet:

Punkte	Operation
1	Addition und Subtraktion
2	Multiplikation und Division
3	Klammern setzen, Wurzel ziehen
4	Fakultät

Schreibt eure Lösung gut lesbar in der Tabelle auf der nächsten Seite auf und gebt die Punktsumme jeweils an.

(a)	0	0	0	$= 6$
(b)	1	1	1	$= 6$
(c)	2	2	2	$= 6$
(d)	3	3	3	$= 6$
(e)	4	4	4	$= 6$
(f)	5	5	5	$= 6$
(g)	6	6	6	$= 6$
(h)	7	7	7	$= 6$
(i)	8	8	8	$= 6$
(j)	9	9	9	$= 6$
(k)	10	10	10	$= 6$

Aufgabe 2. Um ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kantenlängen a, b und c und den Eckpunkten A, B und C (rechter Winkel bei C), wird entsprechend Abbildung 1 ein Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ gezeichnet.

Zeigt, dass der Flächeninhalt dieses Sechsecks gleich dem des Sechsecks $Q_1Q_2Q_3$ $Q_4Q_5Q_6$ in Abbildung 2 ist.

Begründet eure Aussagen so knapp wie möglich und so ausführlich wie nötig. Schreibt einen sprachlich einwandfreien Text.

Abbildung 1

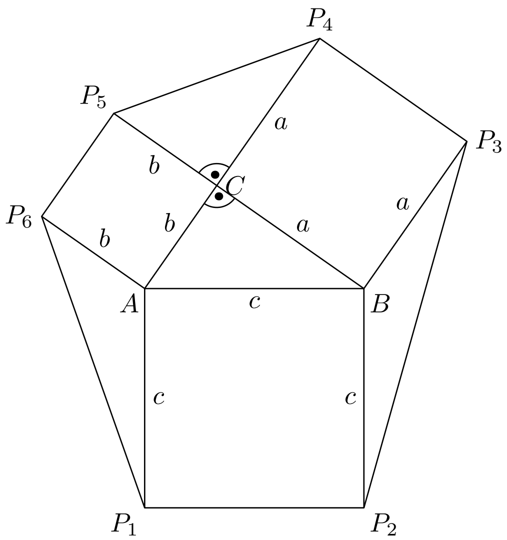
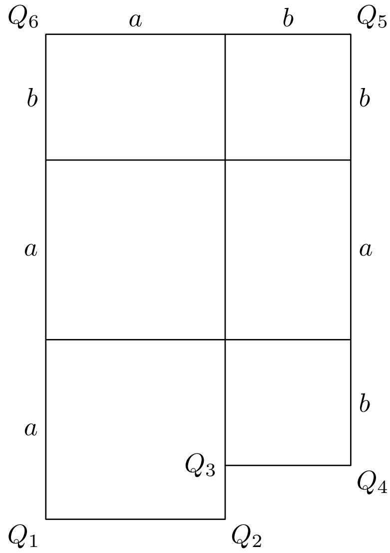


Abbildung 2



Aufgabe 3. Durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel gegeben.

(a) $A(-1|4)$, $B(0|6)$ und $C(2|22)$ sind Punkte einer Parabel. Bestimmt für diese Parabel die Koeffizienten a, b und c. (Zur Kontrolle: $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$)

(b) $A(a_1|a_2)$, $B(b_1|b_2)$ und $C(c_1|c_2)$ sind drei verschiedene Punkte einer Parabel mit ganzzahligen Koordinaten. Zeigt, dass dann die Koeffizienten a, b und c der quadratischen Funktion rationale Zahlen sind.

Begründet eure Aussagen so knapp wie möglich und so ausführlich wie nötig. Schreibt einen sprachlich einwandfreien Text.

Aufgabe 4. Gegeben ist ein Tetraeder (Pyramide, deren Oberfläche aus 4 gleichseitigen Dreiecken besteht). Die Kanten dieses regelmäßigen Körpers sollen mit 6 verschiedenen Farben gefärbt werden, so dass jede Farbe genau einmal vorkommt. (Hinweis: Zwei Kantenfärbungen F_1 und F_2 sind verschieden, wenn das F_1-Tetraeder nicht durch Drehen und Kippen in das F_2-Tetraeder verwandelt werden kann.)

(a) Zeichnet sorgfältig ein Schrägbild mit der Kantenlänge $a = 8\text{cm}$.

(b) Wie viel verschiedene Kantenfärbungen sind möglich?

(Hinweis: Bei einem Schrägbild werden Strecken in die Zeichenebene hinein im Winkel von 45° mit halber Länge abgetragen. Strecken parallel zur Zeichenebene werden in voller Länge ohne Drehung dargestellt.)

Begründet eure Aussagen so knapp wie möglich und so ausführlich wie nötig. Schreibt einen sprachlich einwandfreien Text.

Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1. Es sei n eine natürliche Zahl. Mit $T(n)$ wird die Anzahl der positiven Teiler, mit $T_g(n)$, bzw. $T_u(n)$ die Anzahl der geraden, bzw. der ungeraden Teiler von n bezeichnet. So ist zum Beispiel für $n = 12$ mit den Teilern $1, 2, 3, 4, 6, 12$ hier $T(12) = 6$, $T_g(12) = 4$ und $T_u(12) = 2$.

(a)
1. Geben Sie fünf Zahlen n an mit ungeradem $T(n)$.
2. Geben Sie fünf Zahlen n mit ungeradem $T_g(n)$ an.
3. Geben Sie fünf Zahlen n mit geradem $T_g(n)$ an.
4. Geben Sie fünf Zahlen n mit ungeradem $T_u(n)$ an.
5. Geben Sie fünf Zahlen n mit geradem $T_u(n)$ an.

(b)
1. Können Sie alle Zahlen n mit ungeradem $T(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
2. Können Sie alle Zahlen n mit ungeradem $T_g(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
3. Können Sie alle Zahlen n mit geradem $T_g(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
4. Können Sie alle Zahlen n mit ungeradem $T_u(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)
5. Können Sie alle Zahlen n mit geradem $T_u(n)$ beschreiben? (mit Beweis!)

Die Lösungen sind jeweils zu begründen. Falls gezeigt wird, dass eine bestimmte Situation möglich ist, reicht die Angabe eines Beispiels, ansonsten muss bewiesen werden, weshalb die Situation in keinem Fall möglich ist.

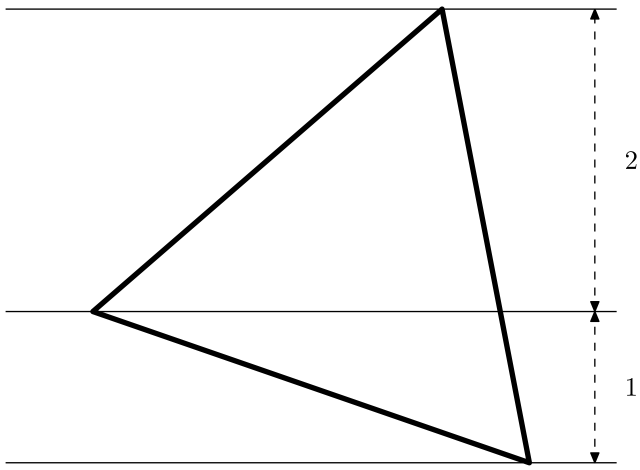
Aufgabe 2. (a) Zwei Münzen haben jeweils eine Seite mit einem *Kopf* und eine mit einer *Zahl*. Durch Manipulation kann man die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse *Kopf* bzw. *Zahl* für jede einzelne Münze beliebig verändern.

Ist es möglich, dass bei gleichzeitigem Werfen beider Münzen die Wahrscheinlichkeit keinmal, einmal oder zweimal Kopf zu erhalten jeweils genau gleich groß ist?

(b) Ähnlich kann man auch Würfel, die ganz normal mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet sind, manipulieren und dabei die Wahrscheinlichkeiten für jede Augenzahl bestimmen – auch wieder für jeden Würfel einzeln.

Wenn man zwei derart manipulierte Würfel gleichzeitig wirft, ist es dann möglich, dass jede mögliche Gesamtaugenzahl gleich wahrscheinlich ist?

Aufgabe 3. Die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen auf drei parallelen Geraden, deren Abstände 1 und 2 sind, vgl. die (nicht maßstabsgerechte) Zeichnung. Berechnen Sie die Seitenlänge des Dreiecks.



Aufgabe 4. (a) Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 4, 8, 16, 32$. Nun wählt man zwei der Zahlen an der Tafel, wischt sie aus und schreibt ihre (nicht-negative) Differenz an die Tafel. Dies wiederholt man fünf mal, so dass nur noch eine Zahl an der Tafel steht. Kann dies die Zahl 17 sein?

Falls ja: Geben Sie ein Vorgehen an, bei dem die 17 am Ende an der Tafel steht. Falls nein: Begründen Sie, warum es kein solches Vorgehen gibt.

(b) Kann am Ende auch die Zahl 10 oder die Zahl 11 an der Tafel stehen? Geben Sie jeweils entweder ein entsprechendes Vorgehen an oder eine Begründung, warum es keine solches Vorgehen gibt.

(c) Die zunächst auf der Tafel stehenden Zahlen seien $1, 2, 4, 8, 16$. Zeigen Sie: Alle Zahlen, die hier am Ende an der Tafel stehen können, können auch dann am Ende auf der Tafel stehen, wenn wir wie zuvor mit $1, 2, 4, 8, 16, 32$ beginnen.

(d) Die Zahlen an der Tafel seien nun $1, 2, 4, \ldots, 2^n$ mit $n \geq 1$. Welche Zahlen können hierbei am Ende an der Tafel stehen? (Mit Beweis, dass diese Zahlen möglich sind, sowie dass keine anderen Zahlen möglich sind.)

(e) Wenn am Anfang die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ an der Tafel stehen ($n \geq 1$), welche Zahlen können dann am Ende an der Tafel stehen? (Mit Beweis!)

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) D (b) E (c) C (d) B (e) D (f) B (g) E (h) D (i) A (j) C

Lösung 2. (a) Gesucht ist die Anzahl k zwischen 1 und 600, die gemeinsame Vielfache von 4, 6 und 10 sind.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 6 und 10 ist 60. Alle Vielfachen von 4, 6 und 10 sind Vielfache vom $\mathrm{kgV}(4, 6, 10) = 60$. Es gibt genau 10 Vielfache von 60 zwischen 1 und 600. Also gibt es 10 Container, die genau 3 Kreuze tragen.

(b) Da Klabautermann und Klabauterfrau nur an Containern mit gerader Nummer Kreuze machen, aber Klabauterkind nur an Containern mit ungerader Nummer, gibt es keine Container mit drei Kreuzen.

Lösung 3. (a) Der Ober stellt die 4 Gläser nacheinander auf den Tisch. Für das 1. Glas hat er dann 9 Möglichkeiten, es zu platzieren, für das 2. Glas noch 8 und danach für das dritte Glas 7 Möglichkeiten und für das 4. Glas 6 Möglichkeiten. Er kann also die 4 Gläser auf $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ verschiedene Weisen auf den Tisch stellen.

Für vier fest ins Auge gefasste Gäste gibt es jedoch mehrere Möglichkeiten, auf die oben angegebene Art die Gläser vor sie zu stellen. Für das 1. Glas stehen alle 4 Gäste zur Auswahl, für das 2. noch 3 Gäste, für das 3. Glas bleiben noch zwei Gäste und schließlich für das 4. Glas nur der 4. Gast übrig (1 Möglichkeit). Von den $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ Weisen, die Teller nacheinander auf den Tisch zu stellen, führen jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2$ (oder $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) Möglichkeiten zu einer identischen Menge von 4 Gästen.

Die Anzahl, vier Gäste zufällig für die Apfelsäfte auszuwählen, ist daher gleich $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$.

(b) Da jede Auswahl von 4 Gästen gleich wahrscheinlich ist, ist die Chance, die richtigen vier Gäste zu wählen, gleich $1 : 126$, die WS gleich $\frac{1}{126}$ (eine Angabe reichte).

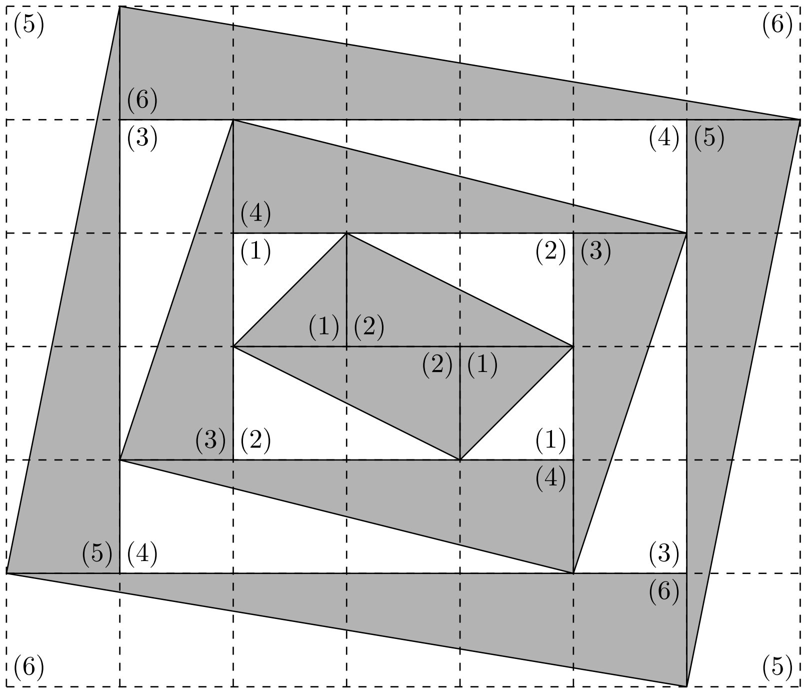
(c) Der Ober stellt zuerst zwei Fischsuppen vor zwei benachbarte Gäste. Dafür hat er 9 Möglichkeiten. Die Anzahl möglicher Positionen für die 3. Suppe hängt jetzt davon ab, wo er die ersten zwei Suppen hingestellt hat:

In zwei Fällen (wenn die 2 Suppen ganz links oder ganz rechts außen serviert wurden) kann die 3. Suppe an einem Nachbarplatz nicht serviert werden, es bleiben $7 = 10 - 2 - 1$ Möglichkeiten für die 3. Suppe.

In sieben Fällen gibt es jeweils einen Platz links und einen Platz rechts von der Position der beiden ersten Suppen, wo die 3. Suppe nicht serviert werden kann. Es bleiben dann jeweils $6 = 10 - 2 - 2$ Möglichkeiten für die 3. Suppe.

Insgesamt gibt es hier $2 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 56$ Möglichkeiten, die drei Suppen zu platzieren.

Lösung 4. In der folgenden Abbildung wird eine Zerlegung der inneren beiden grauen Flächen dargestellt.



(a) Da sich das graue Parallelogramm in zwei Flächen (1) und zwei Flächen (2) zerlegen lässt, gilt für seinen Flächeninhalt offensichtlich $F_0 = 1 + 2 = 3$.

Anders argumentiert: Die Fläche stellt die Hälfte des inneren Rechtecks dar, also ist auch ihr Inhalt halb so groß. Da da innerste Rechteck die Seitenlängen 2 und 3 hat, gilt $F_0 = 3$.

(b) Betrachten wir in der Abbildung die erste Stufe der Erweiterung: Da sich der graue „Ring" in zwei Flächen (3) und zwei Flächen (4) zerlegen lässt und da sich die zwei Flächen (3) zu einem Rechteck mit dem Inhalt $1 \cdot 3 = 3$ und die zwei Flächen (4) zu einem Rechteck mit dem Inhalt 4 zusammen legen lassen, gilt für den Inhalt des grauen Rings $R_1 = 3 + 4 = 7$.

Nach der ersten Erweiterung ergibt sich also eine gesamte graue Fläche von $F_2 = 10$.

Wesentlich ist die Erkenntnis, dass in jeder „Stufe“ die grau gefärbten Gebiete des „Ringes“ sich paarweise zur Hälfte des neu dazugekommenen Randes zusammen schieben lassen.

Damit liefert der zweite Ring einen weiteren Inhalt von $R_2 = 5 + 6 = 11$, und damit hat die in der Aufgabe angegebene graue Fläche den Inhalt $F_2 = 10 + 11 = 21$.

Ebenso lässt sich bei dieser Teilfrage erkennen: Nach jeder „Stufe“ ist der Flächeninhalt der gesamten grau gefärbten Fläche die Hälfte des Flächeninhalts des jeweils umhüllten Rechtecks. In der Abbildung hat dieses die Seitenlängen 6 und 7, also hat die gesamte graue Fläche den Inhalt $F_2 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

(c) Mit der ersten Argumentation: Der nächste Ring hat als Flächeninhalt die Hälfte seines Randes, also $R_3 = 7 + 8 = 15$.

Mit der allgemeineren Argumentation: Im nächsten Schritt ergibt sich $F_3 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$. Also ist eine Fläche von der Größe 15 dazu gekommen.

(d) Wiederum lässt sich auf beide Weisen argumentieren: das allgemeinere Argument ergibt unmittelbar $F_n = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) $(0! + 0! + 0!)! = 6$ (21)

(b) $(1 + 1 + 1)! = 6$ (9)

(c) $2 + 2 + 2 = 6$ (2)

(d) $3 \cdot 3 - 3 = 6$ (3)

(e) $4 + 4 - \sqrt{4} = 6$ (5)

(f) $5 : 5 + 5 = 6$ (3)

(g) $6 + 6 - 6 = 6$ (2)

(h) $7 - 7 : 7 = 6$ (3)

(i) $8 - \sqrt{\sqrt{8 + 8}} = 6$ (8)

(j) $9 - 9 : \sqrt{9} = 6$ (6)

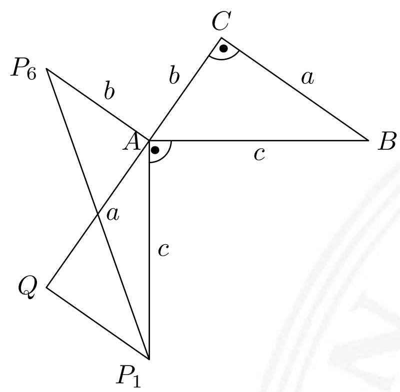
(k) $\sqrt{10 - 10 : 10}\,! = 6$ (10)

Lösung 2. Das Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ besteht aus 2 Quadraten mit der Seitenlänge a, 2 Quadraten mit der Seitenlänge b und 2 Rechtecken jeweils mit Seitenlängen a und b. Daher hat es den Flächeninhalt

$$2a^2 + 2b^2 + 2ab. \tag{1}$$

Das Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ besteht aus vier Dreiecken und Quadraten mit Flächen a^2, b^2 und $c^2 = a^2 + b^2$ (nach Pythagoras). Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und CP_4P_5 haben jeweils den Flächeninhalt $\frac{ab}{2}$.

Die bisher betrachteten Teilflächen des Sechsecks haben zusammen den Flächeninhalt $2a^2 + 2b^2 + ab$. Der Flächeninhalt des Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ stimmt also genau dann mit (1) überein, wenn die Flächeninhalte der Dreiecke P_1AP_6 und P_2P_3B zusammen ab ergeben.



Es wird nun gezeigt, dass das Dreieck P_1AP_6 den Flächeninhalt $\frac{ab}{2}$ hat. Analoges folgt auch für das Dreieck P_2P_3B, womit die Behauptung bewiesen ist.

Dazu betrachtet man die Verlängerung von AC über A hinaus um a. Der Endpunkt hiervon sei Q. Da bei A die drei Winkel $\angle BAC$, $\angle P_1AB$ und $\angle QAP_1$ zusammen 180° betragen, genau wie die Innenwinkel des Dreiecks ABC, ist $\angle QAP_1 = \angle CBA$ (siehe auch obige Abbildung).

In den Dreiecken ABC und P_1AQ stimmt also zusätzlich zu den Seiten a und c noch der von diesen eingeschlossene Winkel überein. Die Dreiecke sind kongruent.

Also ist bei Q ein rechter Winkel, weshalb AQ die parallel verschobene Höhe im Dreieck P_1AP_6 über b ist. Da AQ gerade a lang ist, beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks P_1AP_6 $\frac{ab}{2}$, was noch zu zeigen war.

Die beiden Sechsecke haben also den gleichen Flächeninhalt.

Lösung 3. (a) Setzt man die gegebenen Punkte in die allgemeine Gleichung ein, so erhält man das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 4 &= a - b + c \\ 6 &= c \\ 22 &= 4a + 2b + c \end{aligned}$$

Nach elementaren Umformungen erhält man die angegebene Gleichung.

(b) Die drei verschiedenen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind $A(a_1|a_2)$, $B(b_1|b_2)$ und $C(c_1|c_2)$.

Dann erhält man das folgende lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen:

$$a_2 = a{a_1}^2 + ba_1 + c \tag{2}$$
$$b_2 = a{b_1}^2 + bb_1 + c \tag{3}$$
$$c_2 = a{c_1}^2 + bc_1 + c \tag{4}$$

Man subtrahiert Gleichung (3) von Gleichung (2) und Gleichung (3) von Gleichung (4) und erhält:

$$a_2 - b_2 = a\left({a_1}^2 - {b_1}^2\right) + b(a_1 - b_1) \tag{5}$$
$$c_2 - b_2 = a\left({c_1}^2 - {b_1}^2\right) + b(c_1 - b_1)$$

Mit Hilfe der 3. Binomischen Formel folgt:

$$\begin{aligned} a_2 - b_2 &= a(a_1 - b_1)(a_1 + b_1) + b(a_1 - b_1) \\ c_2 - b_2 &= a(c_1 - b_1)(c_1 + b_1) + b(c_1 - b_1) \end{aligned}$$

Man dividiert die Gleichung durch $(a_1 - b_1)$ bzw. $(c_1 - b_1)$, so dass folgt:

$$\frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = a(a_1 + b_1) + b$$
$$\frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} = a(c_1 + b_1) + b$$

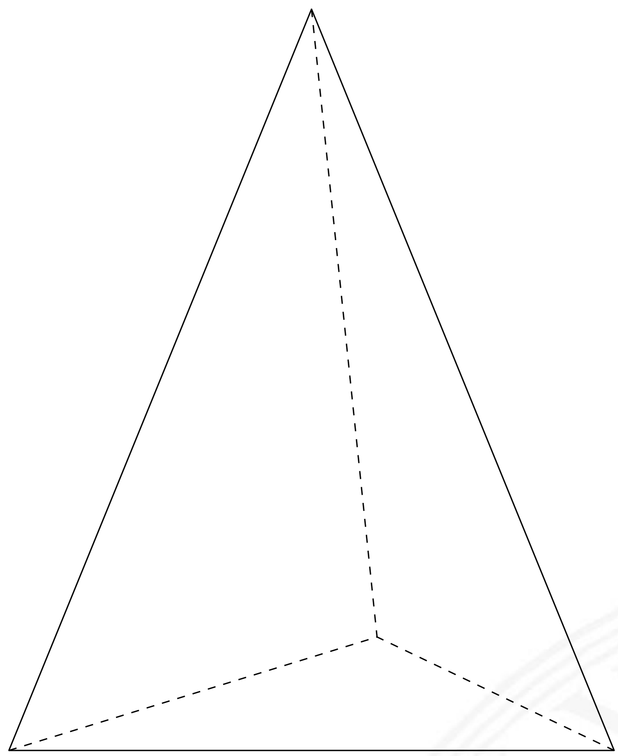
Nun subtrahiert man wieder diesen beiden Gleichungen und klammert a aus:

$$a[(a_1 + b_1) - (c_1 + b_1)] = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} - \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung rational ist und $(a_1+b_1)-(c_1+b_1)$ nach Voraussetzung ungleich 0 ist, ist a rational.

Aus (5) folgt die Rationalität von b und aus (2) die von c.

Lösung 4. (a) Schrägbild:



(b) Ein Tetraeder hat 6 verschiedene Kanten. Für die erste Kante gibt es 6 Möglichkeiten, für die zweite 5, für die dritte 4, für die vierte 3, für die fünfte 2 und für die sechste eine Möglichkeit. Also insgesamt $6! = 720$ Möglichkeiten. (Man kann diesen Vorgang auch als ein Ziehen ohne Zurücklegen betrachten.)

Allerdings kann jede der 4 Seiten des Tetraeders als Grundseite und jede der 3 „Mantelkanten“ als vordere gewählt werden. Folglich gibt es $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene Möglichkeiten für die vordere Kante. Da beim Tetraeder die verschiedenen Positionen nicht zu unterschieden sind, gibt es $720 : 12 = 60$ verschiedene Färbungen des Tetraeders.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a)

1. Zum Beispiel $1, 4, 9, 16, 25$.
2. Zum Beispiel $2, 8, 18, 32, 50$.
3. Zum Beispiel $4, 8, 12, 16, 20$.
4. Zum Beispiel $1, 9, 25, 49, 81$.
5. Zum Beispiel $3, 5, 7, 11, 13$.

(b)

1. Genau für Quadratzahlen n ist $T(n)$ ungerade. Ist a ein Teiler der Zahl n, so ist auch $\frac{n}{a}$ ein Teiler. Ist n keine Quadratzahl, lassen sich die Teiler stets in Paare der Form $(a, \frac{n}{a})$ aufteilen, somit ist $T(n)$ gerade. Ist n hingegen eine Quadratzahl, so lassen sich alle Teiler bis auf $\sqrt{n}$ in solche Paare aufteilen, daher ist $T(n)$ ungerade.
2. Die Zahlen n mit ungeradem $T(n)$ sind genau die Zahlen, die das Doppelte einer Quadratzahl sind. Um das zu sehen, schreiben wir eine beliebige Zahl n als $n = 2^a \cdot b$, wobei b ungerade ist. (Wir spalten also alle Faktoren 2 ab.) Jeder gerade Teiler von n ist das Produkt von einem Teiler von b und einem geraden Teiler von 2^a. Da 2^a genau a gerade Teiler hat (nämlich $2, 4, 8, \ldots, 2^a$), haben wir
$$T_g(n) = T(b) \cdot T_g(2^a) = T(b) \cdot a.$$
Also ist $T_g(n)$ genau dann ungerade, wenn $T(b)$ und a ungerade sind. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist dies genau dann der Fall, wenn b eine Quadratzahl ist und a ungerade. Somit ist $n = 2 \cdot 2^{a-1} \cdot b$, wobei $2^{a-1} \cdot b$ eine Quadratzahl ist.
3. Die Zahlen n mit geradem $T_g(n)$ sind genau die Zahlen, für die $T_g(n)$ nicht ungerade ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist dies genau dann der Fall, wenn n nicht das Doppelte einer Quadratzahl ist, also wenn entweder n ungerade ist oder $\frac{n}{2}$ keine Quadratzahl ist.
4. Die Zahlen n mit ungeradem $T_u(n)$ sind genau die Zahlen, die von der Form $n = 2^a \cdot u^2$ sind, wobei u ungerade ist. Denn schreiben wir eine beliebige Zahl n als $n = 2^a \cdot b$, wobei b ungerade ist, so ist jeder ungerade Teiler offensichtlich ein Teiler von b. Daher gilt $T_u(n) = T(b)$, was nach dem ersten Aufgabenteil genau dann ungerade ist, wenn b eine Quadratzahl ist.
5. Nach dem vorherigen Aufgabenteil sind die Zahlen n mit geradem $T_u(n)$ genau die Zahlen, die nicht von der Form $n = 2^a \cdot u^2$ mit u ungerade sind. Also sind sie von der Form $n = 2^a \cdot b$, wobei b ungerade ist und keine Quadratzahl.

Lösung 2. (a) Die Wahrscheinlichkeit der ersten bzw. zweiten Münze *Kopf* zu zeigen sei K_1 bzw. K_2; für *Zahl* ist sie dann $1-K_1$ bzw. $1-K_2$. Jedes der drei möglichen Ereignisse soll gleich wahrscheinlich sein, die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis also jeweils $\frac{1}{3}$ betragen.

Keinmal *Kopf* hat dann die Wahrscheinlichkeit $(1-K_1)\cdot(1-K_2)=\frac{1}{3}$. Einmal *Kopf*: $(1-K_1)\cdot K_2+K_1\cdot(1-K_2)=\frac{1}{3}$. Zweimal *Kopf*: $K_1\cdot K_2=\frac{1}{3}$. Setzt man die dritte Gleichung in die ersten beiden ein, so erhält man

$$1-(K_1+K_2)+\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad (K_1+K_2)-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

(Es reicht, in eine von beiden einzusetzen, wie sich gleich herausstellt.)

Diese beiden Gleichungen sind genau für $K_1+K_2=1$ erfüllt, also $K_2=1-K_1$. Dieses in $K_1K_2=\frac{1}{3}$ eingesetzt ergibt

$$K_1(1-K_1)=\frac{1}{3}.$$

Diese quadratische Gleichung formt man um in

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}={K_1}^2-K_1+\frac{1}{4}=(K_1-\frac{1}{2})^2.$$

Da $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}<0$, gibt es keine (reelle) Lösung für K_1. Es kann also keine zwei Münzen geben, für die keinmal, einmal oder zweimal *Kopf* paarweise gleich wahrscheinlich sind.

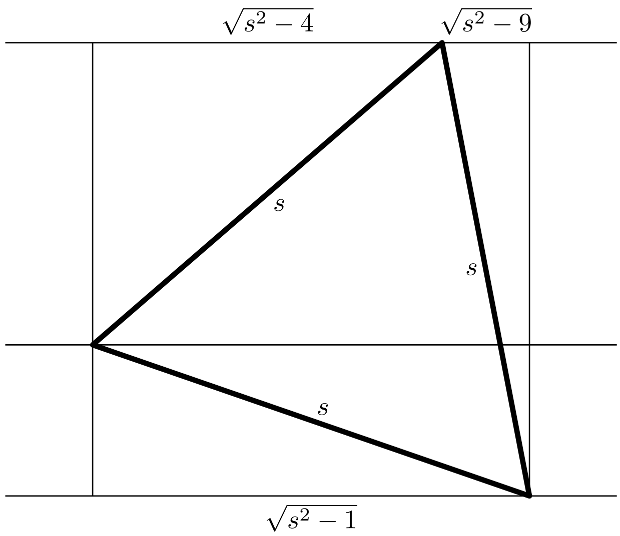
(b) A_i mit $i=1,\ldots,6$ seien die Wahrscheinlichkeiten, dass der erste Würfel i liefert, B_i die entsprechenden für den zweiten Würfel. Jede der möglichen Summen $2,\ldots,12$ soll mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{11}$ auftreten.

Um 2 bzw. 12 zu erhalten, gibt es jeweils nur eine Möglichkeit, also $A_1B_1=A_6B_6=\frac{1}{11}$. Keine der Zahlen A_1, B_1, A_6 und B_6 kann 0 sein, also $B_1=\frac{1}{11A_1}$ und $B_6=\frac{1}{11A_6}$. Nun ist die Gesamtsumme 7 mindestens so wahrscheinlich wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 und eine 6 fällt, also nicht kleiner als

$$A_1B_6+A_6B_1=A_1\frac{1}{11A_6}+A_6\frac{1}{11A_1}=\frac{1}{11}\left(\frac{A_1}{A_6}+\frac{A_6}{A_1}\right).$$

Da die Summe einer positiven Zahl und ihres Kehrwerts stets größer als 1 ist, ist dieser Wert größer als $\frac{1}{11}$. Die Wahrscheinlichkeit für die Gesamtsumme 7 kann also nicht $\frac{1}{11}$ sein, wenn die für 2 und 12 bereits $\frac{1}{11}$ sind.

Lösung 3. Die Seitenlänge sei s. Schließt man das Dreieck in ein Rechteck ein (siehe Zeichnung), so ergeben sich mit dem Satz von Pythagoras die in der Zeichnung angegebenen Längen $\sqrt{s^2-1}$, $\sqrt{s^2-4}$ und $\sqrt{s^2-9}$.



Da die beiden Seiten des Rechtecks gleich lang sind, gilt also

$$\sqrt{s^2-1} = \sqrt{s^2-4} + \sqrt{s^2-9}.$$

Durch Quadrieren und weiteres Umformen erhält man

$$\begin{aligned}
& & s^2 - 1 &= s^2 - 4 + s^2 - 9 + 2\sqrt{(s^2-4)(s^2-9)} \\
&\Longrightarrow & 12 - s^2 &= 2\sqrt{(s^2-4)(s^2-9)} \\
&\Longrightarrow & (12 - s^2)^2 &= 4(s^2-4)(s^2-9) \\
&\Longrightarrow & 144 - 24s^2 + s^4 &= 4s^4 - 52s^2 + 144 \\
&\Longrightarrow & 3s^4 &= 28s^2 \\
&\Longrightarrow & s^2 &= \frac{28}{3} \\
&\Longrightarrow & s &= \sqrt{\frac{28}{3}}.
\end{aligned}$$

Lösung 4. (a) Die 17 erhält man zum Beispiel wie folgt:

$$\begin{aligned}
& 1,2,4,8,16,32 \xrightarrow{4,8\to 4} 1,2,4,16,32 \xrightarrow{2,4\to 2} 1,2,16,32 \\
\xrightarrow{1,2\to 1}\; & 1,16,32 \xrightarrow{1,16\to 15} 15,32 \xrightarrow{15,32\to 17} 17
\end{aligned}$$

(b) Die 10 ist nicht möglich, da während des Vorganges immer genau eine ungerade Zahl an der Tafel steht. (Wischt man zwei gerade Zahlen aus, so ist ihre Differenz eine gerade Zahl. Wischt man eine gerade und eine ungerade

Zahl aus, so ist ihre Differenz eine ungerade Zahl.) Die 11 erhält man zum Beispiel wie folgt:

$$\begin{array}{llllll} & 1,2,4,8,16,32 & \xrightarrow{16,32\to 16} & 1,2,4,8,16 & \xrightarrow{1,2\to 1} & 1,4,8,16 \\ \xrightarrow{1,4\to 3} & 3,8,16 & \xrightarrow{3,8\to 5} & 5,16 & \xrightarrow{5,16\to 11} & 11 \end{array}$$

(c) Bei $1, 2, 4, 8, 16, 32$ ersetzt man zunächst $16, 32$ durch 16 und verfährt dann wie bei $1, 2, 4, 8, 16$.

(d) Man kann genau die ungeraden Zahlen von 1 bis $2^n - 1$ erhalten. Gerade Zahlen sind nicht möglich, da stets genau eine ungerade Zahl an der Tafel steht (siehe zweiter Aufgabenteil), größere Zahlen als 2^n sind offensichtlich auch nicht möglich. Die ungeraden Zahlen von 1 bis $2^{n-1} - 1$ erhält man, indem man zuerst $2^{n-1}, 2^n$ durch 2^{n-1} ersetzt und dann wie bei $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ verfährt. Die restlichen Zahlen erhält man, indem man zunächst mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ eine geeignete ungerade Zahl (kleiner als 2^{n-1}) erzeugt und dann aus dieser und der Zahl 2^n die gewünschte ungerade Zahl erhält.

(e) Ist n oder $n + 1$ durch 4 teilbar (also $n = 3, 4, 7, 8, \ldots$), so kann man genau die geraden Zahlen von 0 bis n beziehungsweise $n - 1$ erhalten. Ansonsten sind genau die entsprechenden ungeraden Zahlen möglich. Andere Zahlen kann man nicht erhalten, da die Parität der Summe der Zahlen an der Tafel sich nicht verändert (wischt man zwei Zahlen aus und ersetzt sie durch ihre Differenz, so sinkt die Summe aller Zahlen an der Tafel um das Doppelte der kleineren der beiden ausgewischten Zahlen, die Summe bleibt also gerade beziehungsweise ungerade) und da die Summe $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ genau dann gerade ist, wenn n oder $n + 1$ durch 4 teilbar ist.

Bei $n = 1$ kann man offenbar die 1 erhalten. Außerdem kann man bei $1, 2, 3, \ldots, n$ alle Zahlen erhalten, die von der Form $n - m$ sind, wobei m eine Zahl ist, die man bei $1, 2, 3, \ldots, n - 1$ erhalten kann. Dies sind bereits alle gewünschten Zahlen außer der 0 (im Fall, dass n oder $n + 1$ durch 4 teilbar ist). Die 0 kann man jedoch leicht erzeugen: Man ersetzt zunächst $n-1, n$ durch 1, dann $n-3, n-2$ durch 1 und so weiter, bis nur noch Einsen an der Tafel stehen. Dies sind dann gerade viele Einsen, man kann daher immer aus zwei Einsen eine 0 erzeugen und erhält am Ende eine einzelne 0.