Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (3+7+10 Punkte)**.** Gegeben seien die Zahlenfolgen:

n	n-te Zahlenfolge
1	1
2	1, 2, 2, 3
3	1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5
4	1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7

(a) Gib die Zahlenfolge für $n = 5$ an.

(b)
- Wie viele Zahlen hat die Folge für $n = 6$?
- Finde einen Term für die Anzahl $A(n)$ der Zahlen der n-ten Zahlenfolge.

(c)
- Berechne den Mittelwert und die Summe der Zahlen der Folge für $n = 6$.
- Finde je einen Term für den Mittelwert $M(n)$ und die Summe $S(n)$ der Zahlen der n-ten Zahlenfolge.

(Alles natürlich mit Begründung.)

Aufgabe 2 (4+5+5+6 Punkte)**.** Hinz und Kunz gehen über den Hamburger Dom. Beide spielen gerne an Würfelbuden. In den beiden Buden Primz und Unz wird jeweils mit zwei Würfeln (jeweils mit den Zahlen 1 bis 6) gespielt.

Bei Primz gewinnt man, wenn die Augensumme der beiden geworfenen Würfel eine Primzahl ist. Bei Unz gewinnt man, wenn die Augensumme eine ungerade Zahl ist.

(a) Begründe, dass es sowohl bei Primz wie bei Unz fünf günstige Ausgänge (Augensummen) gibt. Gib diese jeweils an.

(b) Bestimme die Gewinnwahrscheinlichkeit bei Unz.

(c) Hinz behauptet, dass die Gewinnchance bei Primz genauso groß ist wie bei Unz. Hat er Recht? (Begründe.)

(d) Kunz würfelt bei Primz. Nachdem er den ersten Würfel gesehen hat, sagt er: „Juhu, wie gut, dass ich mich für Primz entschieden habe.“ Offensichtlich hat er eine Zahl gesehen, mit der seine Gewinnchance bei Unz kleiner wäre. Welche Zahl hat er gesehen?

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Bei der Post kann man Paket-Sets in vier Größen kaufen:

Größe 1: 250 mm $\times$ 175 mm $\times$ 100 mm

Größe 2: 350 mm $\times$ 250 mm $\times$ 120 mm

Größe 3: 400 mm $\times$ 250 mm $\times$ 150 mm

Größe 4: 500 mm $\times$ 300 mm $\times$ 200 mm

Es sollen Gegenstände in diese Pakete eingepackt werden, wobei jede Seite des einzupackenden Gegenstands parallel zu einer Seite des Pakets sein soll.

(a) Gib an, wie viele Pakete der Größe 1 in die Pakete der Größe 2, 3 bzw. 4 hineinpassen. Begründe.

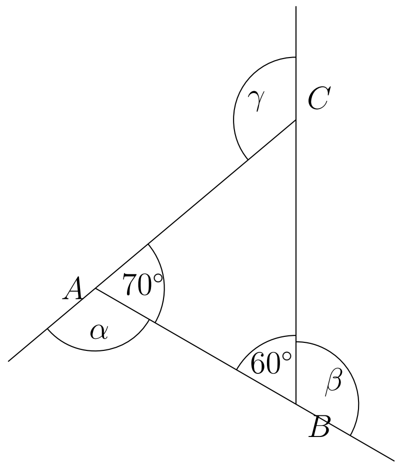
(b) Karla will Maya Karl-May-Bände einer bestimmten Auflage schicken und zwar mindestens drei Stück. Jedes Buch hat die Maße 12 cm $\times$ 20 cm $\times$ 4 cm.

- Welche Paketgröße muss sie mindestens nehmen?
- Gib an, wie viele Bücher dann höchstens in diese Paketgröße passen und beschreibe wie du die Bücher anordnest.

Aufgabe 4 (5+5+5+5 Punkte)**.** (a) Zwei Innenwinkel eines Dreiecks sind in der Zeichnung rechts angegeben.

Berechne die Außenwinkel α, β und γ und die Summe

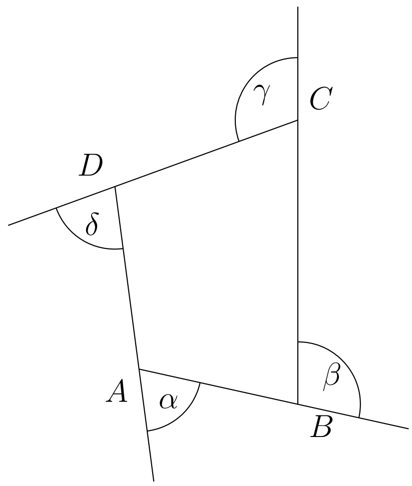
$$\alpha + \beta + \gamma.$$



(b) Berechne die Summe der Außenwinkel eines (beliebigen) konvexen Vierecks (ein Beispiel ist in der Abbildung rechts).

(c) Berechne die Summe der Außenwinkel eines konvexen Fünfecks.

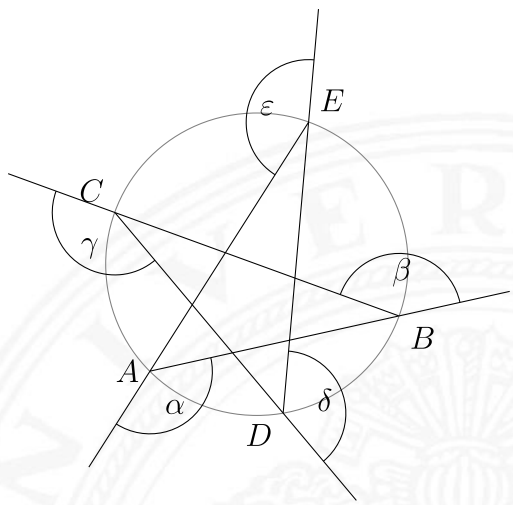
Hinweis: Statt des Vier- und Fünfecks kannst du natürlich auch gleich das n-Eck betrachten.



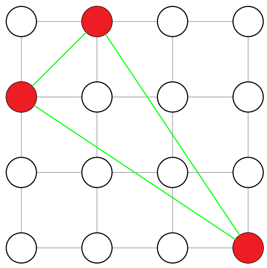
(d) Nun werden Überschneidungen der Seiten der Polygone zugelassen, aber dafür sollen alle Ecken auf einem Kreis liegen, wie in dem rechts abgebildeten Fünfeck.

Berechne die Summe der Außenwinkel in dem rechts skizzierten Fünfeck. (Hinweis: Messen ist kein Beweis.)

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Überlege, wie man im allgemeinen Fall eines in einem Kreis einbeschriebenen n-Ecks mit Überschneidungen die Außenwinkel definieren könnte. Stelle Vermutungen über die Außenwinkelsumme auf.



Klassenstufen 9, 10



(Beispiel eines gleichschenkligen Dreiecks aus Gitterpunkten.)

Aufgabe 1 (5+5+10 Punkte)**.** Wir betrachten sechzehn Punkte eines quadratischen Gitters wie oben angeordnet. Drei dieser Punkte bilden hier ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen. (Entartete Dreiecke werden hier also nicht betrachtet.)

(a) Zeige: Man kann von diesen 16 Punkten vier Punkte so auswählen, dass keine drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

(b) Zeige: Man kann von diesen 16 Punkten fünf Punkte so auswählen, dass keine drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

(c) Zeige: Wenn man von diesen 16 Punkten neun beliebig auswählt, kann man stets drei unter ihnen finden, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). (a) Zeige: Man kann von diesen 16 Punkten sechs Punkte so auswählen, dass keine drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

(b) Zeige: Wenn immer man sieben dieser 16 Punkte auswählt, bilden drei von ihnen die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.

Aufgabe 2 (4+4+5+7 Punkte)**.** Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ sei $a(n)$ die natürliche Zahl, deren Ziffernfolge aus n Einsen besteht, und $b(n)$ die Zahl, deren Ziffernfolge nacheinander aus einer Eins, $n - 1$ Nullen und einer Fünf besteht. (Zum Beispiel ist $a(7) = 1111111$, $b(7) = 10000005$). Weiterhin sei

$$c(n) = a(n) \cdot b(n) + 1.$$

(a) Beweise, dass für kein n die Zahl $c(n)$ durch 10 teilbar ist.

(b) Zeige, dass $c(1)$, $c(2)$ und $c(3)$ Quadratzahlen sind.

(c) Beschreibe die Ziffernfolge von $c(n)$.

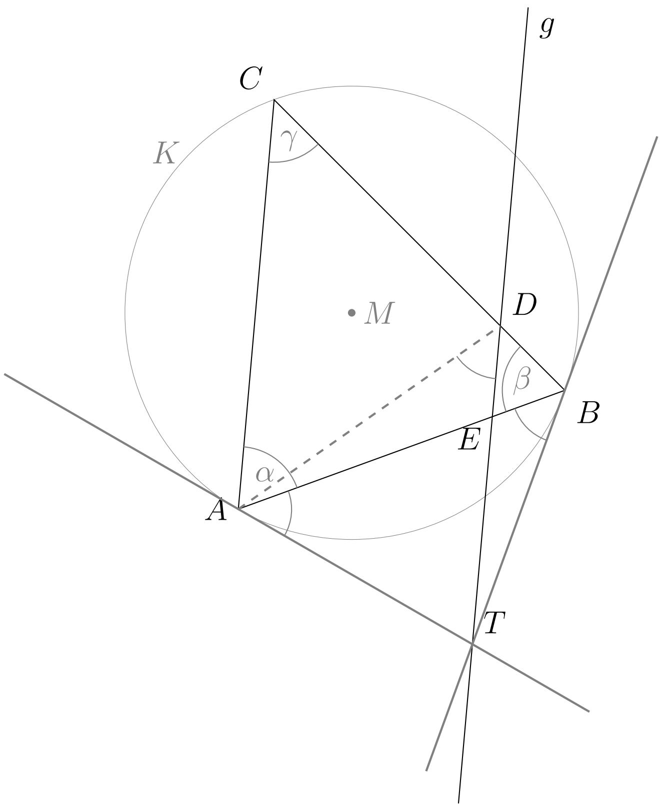
(d) Beweise, dass für alle n die Zahlen $c(n)$ Quadratzahlen sind. (Hinweis: Man kann die 3. Binomische Formel ausnutzen.)

Aufgabe 3 (6+6+8 Punkte)**.** Es seien p und q zwei Primzahlen mit $p > q$. Ersichtlich sind dann die Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ ausgekürzt (das heißt, Zähler und Nenner enthalten keinen gemeinsamen Faktor mehr), und keiner der beiden Zähler und keiner der beiden Nenner lässt sich in zwei Faktoren größer als 1 zerlegen.

(a) Zeige, dass der mit dem Nenner $p \cdot q$ geschriebene Bruch $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ immer noch ausgekürzt ist.

(b) Nun wird ein ausgekürzter Bruch $\frac{r}{s}$ betrachtet, bei dem r und s aber keine Primzahlen seien müssen. Ist es möglich, dass der mit dem Nenner $r \cdot s$ geschriebene Bruch $\frac{r}{s} + \frac{s}{r}$ nun nicht ausgekürzt ist?

(c)
- Zeige, dass der mit dem Nenner $p \cdot q$ geschriebene Bruch $\frac{p}{q} - \frac{q}{p}$ immer ausgekürzt ist.
- Bestimme, für welche Primzahlen $p > q$ der Zähler eine Primzahl ist und für welche nicht.



Aufgabe 4 (6+4+6+4 Punkte)**.** Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC und sein Umkreis K mit dem Mittelpunkt M. Sei T der Schnittpunkt der Tangenten an K in A und in B. Die Gerade g verlaufe parallel zu AC durch T. Seien D und E die Schnittpunkte der Geraden g mit BC bzw. AB.

(a) Zeige, dass $\angle TAB = \angle ABT = \angle ACB$ gilt.

(b) Zeige, dass die Dreiecke ΔEBD und ΔETA ähnlich zu ΔABC sind.

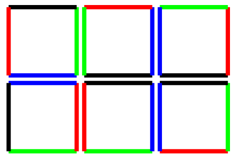
(c) Berechne $\angle ADE$ (in Abhängigkeit von α, β oder γ).

(d) Beweise, dass das Dreieck ΔADC gleichschenklig ist.

Hinweis: Die Aussagen vorheriger Aufgabenteile dürfen in den jeweiligen Aufgabenteilen benutzt werden.

Es darf angenommen werden, dass M innerhalb des Dreiecks ΔABC liegt.

Oberstufe (11, 12, 13)



Aufgabe 1 (4+4+4+8 Punkte)**.** Ein Rechteck der Breite m und der Höhe n bestehe aus $m \cdot n$ quadratischen Kästchen der Seitenlänge 1. Die Seiten der Kästchen sollen mit den Farben Rot, Grün, Blau und Schwarz so eingefärbt sein, dass

- jedes Kästchen vier verschiedenfarbige Seiten hat und
- aneinanderliegende Seiten jeweils dieselbe Farbe haben.

Es wird nun untersucht, wann es möglich ist, dass die vier äußeren Kanten des $m \times n$-Rechtecks jeweils eine durchgängige Farbe haben und keine zwei der äußeren Kanten gleichfarbig sind.

(a) Zeige, dass es für $m = 2$ und $n = 2$ möglich ist.

(b) Zeige, dass es für $m = 3$ und $n = 3$ möglich ist.

(c) Zeige, dass es für $m = 3$ und $n = 2$ nicht möglich ist.

(d) Zeige, dass es für ein Paar (m, n) genau dann möglich ist, wenn $m + n$ gerade ist.

Aufgabe 2 (20 Punkte)**.** Bestimme alle Lösungen von

$$(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x.$$

(Hinweis: Es muss natürlich auch gezeigt werden, dass es keine weiteren Lösungen gibt.)

Aufgabe 3 (7+7+6 Punkte)**.** Rechtecke sollen so ohne Überlappung in ein Quadrat gelegt werden, dass die Rechteckseiten parallel zu den Quadratseiten sind.

(a) Gib jeweils die kleinste Seitenlänge für ein Quadrat an,

- in das man vier 2×9-Rechtecke bzw.
- in das man vier 3×5-Rechtecke

hineinlegen kann. (Begründe.)

(b) Ermittle in Abhängigkeit von a und b die kleinste Seitenlänge für ein Quadrat, in dass man vier $a \times b$-Rechtecke hineinlegen kann.

(c) Beweise mit den bisherigen Ergebnissen die folgende Ungleichung, welche die einfachste Variante der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Aufgabe 4 (5+5+5+5 Punkte)**.** In Sigmars Hotel gibt es fünf Zimmer, die alle belegt sind: Herr Eins wohnt in Zimmer 1, Herr Zwei in Zimmer 2, ..., Herr Fünf in Zimmer 5. Sigmar kann leider nicht richtig mit dem Computer umgehen und erzeugt eine fehlerhafte Gästeliste: Darin sind zwar alle fünf Herren für verschiedene Zimmer eingetragen, aber nicht unbedingt richtig zugeordnet. Anstatt die Liste erneut zu bearbeiten, zieht Sigmar es vor, lieber die Gäste so umziehen zu lassen, dass die Liste stimmt. Während des Abendessens am Anreisetag heftet Sigmar an die entsprechenden Zimmertüren ein Schild, auf dem er den jeweiligen Bewohner bittet, nach dem Abendessen in das angegebene Zimmer umzuziehen. Hierbei kann es auch vorkommen, dass an einigen Zimmertüren gar kein Zettel heftet und der entsprechende Gast in dem Zimmer bleibt.

Leider vergisst er, die Schilder abzunehmen. Die Gäste befolgen daher nach jedem Abendessen die Anweisung an der Tür des Zimmers, das sie an dem Tag bewohnt haben.

(a) Angenommen, in der zweiten Nacht ist die Verteilung der Gäste wie folgt:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	2	1	4	3	5

Gib die Gästeliste von Sigmar an, falls an der Tür von Zimmer 1 steht: „Bitte ziehen Sie nach dem Abendessen in Zimmer 4 um.“

(b) Schlafen unter derselben Annahme wie im vorherigen Aufgabenteil alle Gäste irgendwann gleichzeitig in ihren ursprünglichen Zimmern (also Herr Eins in Zimmer 1 usw.)? Wenn ja, in welcher Nacht passiert das zum ersten Mal?

(c) Angenommen, in der zweiten Nacht ist die Verteilung der Gäste wie folgt:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	2	3	4	5	1

Gib an, wie Sigmars Gästeliste in diesem Fall aussehen könnte.

(d) Kann man für jede mögliche Liste von Sigmar und ohne Kenntnis der Belegungen in vorherigen Nächten eine Aussage über die Belegung in der 121ten Nacht machen?

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Das Hotel habe jetzt n Zimmer.

- Gibt es eine Nacht, von der wir unabhängig von Sigmars Liste wissen, dass danach jeder Gast schon mindestens einmal in seinem ursprünglichen Zimmer geschlafen hat? Welches ist die kleinste Zahl k, so dass dies nach der k-ten Nacht der Fall ist?

- Gibt es eine Nacht, von der wir unabhängig von Sigmars Liste wissen, dass alle Gäste gleichzeitig in ihren ursprünglichen Zimmern schlafen? Welches ist die kleinste Zahl k, so dass dies in der k-ten Nacht eintritt?

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Für $n = 5$ lautet die Folge

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9.$$

(b) Schreibt man von 1 bis n jeweils die wiederholten Zahlen in eine Reihe, aber jede neue Zahl in eine neue Zeile, erhält man ein Dreieck der Höhe n (n Zahlen von 1 bis n) und der Breite n (n-mal die Zahl n). Auch die Zahlen von $n + 1$ bis $2 \cdot n - 1$ ergeben auf diese Weise ein Dreieck mit Höhe $n - 1$ ($n - 1$ Zahlen von $n + 1$ bis $2 \cdot n - 1$) und Breite $n - 1$ ($n - 1$-mal die Zahl $n + 1$):

1		$n+1$	$n+1$	$\cdots$		$n+1$
2	2		$n+2$	$n+2$	$\cdots$	$n+2$
$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$			$\ddots$		$2 \cdot n - 2$	$2 \cdot n - 2$
$n-1$	$n-1$	$\cdots$		$n-1$		$2 \cdot n - 1$
n	n	$\cdots$			n	

Diese beiden Dreiecke kann man zu einem vollständigen $n \times n$-Quadrat zusammenfügen. Beispielhaft für $n = 2$ bis $n = 5$:

1	3
2	2

1	4	4
2	2	5
3	3	3

1	5	5	5
2	2	6	6
3	3	3	7
4	4	4	4

1	6	6	6	6
2	2	7	7	7
3	3	3	8	8
4	4	4	4	9
5	5	5	5	5

Somit besteht die n-te Zahlenfolge aus n^2 Zahlen.

Für $n = 6$ sind es also 36 Zahlen und allgemein ist die Anzahl der Zahlen der n-ten Zahlenfolge

$$A(n) = n^2.$$

Alternativ kann man die Zahlen auch entlang von Diagonalen eines $n \times n$-Quadrats anordnen:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\
2 & \ddots & n-1 & n & n+1 \\
\vdots & n-1 & n & n+1 & \vdots \\
n-1 & n & n+1 & \ddots & 2\cdot n-2 \\
n & n+1 & \cdots & 2\cdot n-2 & 2\cdot n-1
\end{array}$$

$\boxed{n-1 \text{ Zahlen}}$ $\boxed{n \text{ Zahlen}}$ $\boxed{n-1 \text{ Zahlen}}$

Zum Beispiel für $n = 5$ erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9
\end{array}$$

(c) Der Mittelwert der einmal vorkommenden Zahlen 1 und 11 beträgt 6, der der zweimal vorkommenden Zahlen 2 und 10 ebenfalls usw. Somit ist auch insgesamt der Mittelwert $M(6) = 6$. Da $A(6) = 36$ ist, beträgt die Summe

$$S(6) = A(6) \cdot M(6) = 36 \cdot 6 = 216\,.$$

Allgemein ist der Mittelwert einer Zahl der Folge und der entsprechenden Zahl vom Ende der Folge immer n, da von den Zahlen n aus gesehen nach links immer so viele um 1 kleinere Zahlen stehen wie nach rechts um 1 größere. Der Mittelwert der n-ten Zahlenfolge beträgt also

$$M(n) = n.$$

Damit errechnet man auch gleich die Summen der n-ten Zahlenfolge

$$S(n) = A(n) \cdot M(n) = n^2 \cdot n = n^3.$$

Lösung 2. (a) Bei Primz sind die günstigen Augensummen 2, 3, 5, 7 und 11, während sie bei Unz 3, 5, 7, 9 und 11 sind.

(b) Steht das Ergebnis des ersten Würfels fest, führt entweder jede ungerade oder jede gerade Zahl auf dem zweiten Würfel zu einer ungeraden Augensumme. In beiden Fällen ist die Chance also $\frac{1}{2}$, weshalb sie auch insgesamt $\frac{1}{2}$ ist.

(c) Neben den gemeinsamen günstigen Ausgängen, gibt es bei Primz die Augensumme 2, während es bei Unz die Augensumme 9 gibt. Da es jedoch nur eine

Möglichkeit für die 2 gibt, nämlich $1 + 1$, aber vier Möglichkeiten für die 9, nämlich $3+6$, $4+5$, $5+4$ und $6+3$, ist die Gewinnchance bei Primz kleiner als bei Unz.

(d) Da alle weiteren günstigen Augensummen bei Primz und Unz dieselben sind, kann die Gewinnchance bei Primz nur größer als die bei Unz sein, wenn 2 noch als Augensumme möglich ist, 9 aber nicht mehr. Dies ist nur genau dann möglich, wenn der erste Würfel eine 1 anzeigt.

Bei Primz sind dann noch die günstigen Augensummen $1 + 1$, $1 + 2$, $1 + 4$ und $1 + 6$ möglich, während bei Unz nur $1 + 2$, $1 + 4$ und $1 + 6$ als günstige Augensummen möglich sind.

Lösung 3. (a) Da $2 \cdot 175 = 350$ ist, kann man die 175 mm-Seite von Größe 1 zweimal an die 350 mm-Seite von Größe 2 anlegen und die 250 mm-Seiten aneinander legen. Schon vom Volumen passt kein drittes Paket der Größe 1 in die verbleibenden 350 mm $\times$ 250 mm $\times$ 20 mm.

Die 175 mm-Seite von Größe 1 passt nur an die 250 mm- oder an die 400 mm-Seite von Größe 3. Legte man es an die 250 mm-Seite, blieben 75 mm übrig, die man für keine Seite mehr nutzen könnte; die 250 mm-Seite von Größe 1 müsste dann an die 400 mm-Seite von Größe 3, weder die verbleibenden 150 mm $\times$ 250 mm $\times$ 150 mm, noch die an der anderen Seite verbleibenden 400 mm $\times$ 250 mm $\times$ 50 mm reichen für ein weiteres Paket der Größe 1 aus. Da man so also nur ein Paket unterbringen kann, kann man annehmen, dass die 175 mm-Seite von Größe 1 an der 400 mm-Seite von Größe 3 liegt, die 250 mm-Seiten aneinander und die 100 mm-Seite an der 150 mm-Seite. Die 50 mm an der 150 mm-Seite kann man nicht mehr für eine Seite der Größe 1 nutzen. In die verbleibenden 225 mm $\times$ 250 mm $\times$ 150 mm passt mit der gleichen Überlegung nur noch ein weiteres Paket der Größe 1. Obwohl vom Volumen her drei Pakete der Größe 1 in eins der Größe 3 passen würden, kann man also mit parallelen Seiten nur zwei hineinpacken.

Die 250 mm-Seite von Größe 1 passt zweimal an die 500 mm-Seite von Größe 4, die 100 mm-Seite dreimal an die 300 mm-Seite. In die verbleibenden 500 mm$\times$300 mm$\times$25 mm passt schon vom Volumen her kein weiteres Paket der Größe 1 mehr, da

$$\frac{250\text{ mm}}{500\text{ mm}} \cdot \frac{100\text{ mm}}{300\text{ mm}} \cdot \frac{175\text{ mm}}{25\text{ mm}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{7}{6} > 1.$$

Also passen höchstens 6 Pakete der Größe 1 in ein Paket der Größe 4.

(b)
- Legt man die Bücher parallel zu den Seiten in ein Paket der Größe 1, so passt die 200 mm-Seite nur an die 250 mm-Seite, die 120 mm-Seite von

den verbliebenen nur an die 175 mm-Seite, weshalb die 40 mm-Seite an der 100 mm-Seite liegen muss. So kann man aber nur zwei Bücher unterbringen (obwohl vom Volumen her vier passen würden). Es muss also mindestens Größe 2 für drei Bücher verwendet werden, was auch passt, wie im nächsten Teil gezeigt wird.

- Da jede Seite eines Buches ein ganzzahliges Vielfaches von 40 mm lang ist, kann unabhängig von der Anordnung der Bücher an jeder Stelle entlang der 350 mm-Seite des Pakets höchstens 320 mm und an jeder Stelle entlang der 250 mm-Seite des Pakets höchtens 240 mm genutzt sein. Insgesamt kann also höchstens 320 mm $\times$ 240 mm $\times$ 120 mm des Pakets benutzt sein. Man erhält als Verhältnis des höchstens genutzten Volumens des Pakets zum Volumen eines Buchs

$$\frac{320 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} \cdot \frac{240 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} \cdot \frac{120 \text{ mm}}{120 \text{ mm}} = 8 \cdot \frac{6}{5} \cdot 1 = \frac{48}{5} < 10,$$

  weshalb höchstens neun Bücher in ein Paket der Größe 2 passen können. Dass neun Bücher wirklich passen, wird nun gezeigt.

  Legt man acht Bücher mit ihren größten Seiten aneinander, benötigt man 120 mm $\times$ 200 mm $\times$ 320 mm. Vom Paket bleibt dann noch ein Raum von 350 mm $\times$ 50 mm $\times$ 120 mm. Dort hinein passt ein weiteres Buch hochkant neben dem Stapel.

Lösung 4. (a) Als Nebenwinkel zu $70°$ ist $\alpha = 180° - 70° = 110°$, entsprechend ist $\beta = 180° - 60° = 120°$. Wenn γ' den Nebenwinkel zu γ bezeichnet, ergibt sich über die Innenwinkelsumme im Dreieck $\gamma' = 180° - 70° - 60° = 50°$. Damit ist dann $\gamma = 180° - \gamma' = 130°$. Als Summe der Außenwinkel erhält man

$$\alpha + \beta + \gamma = 110° + 120° + 130° = 360°.$$

(b) Es sei $\alpha' = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel zu α usw. Damit gilt dann für die Innenwinkelsumme im Viereck

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + \delta &= (180° - \alpha') + (180° - \beta') + (180° - \gamma') + (180° - \delta')\\ &= 4 \cdot 180° - (\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta')\\ &= 4 \cdot 180° - 360° = 360°.\end{aligned}$$

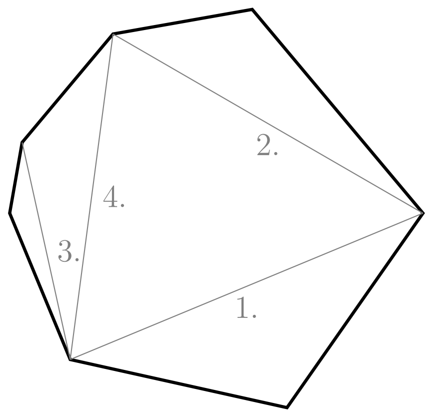
(c) Die Innenwinkelsumme im Fünfeck beträgt $(5-2)\cdot 180° = 540°$. Mit analoger Rechnung zum vorherigen Aufgabenteil erhält man für die Außenwinkelsumme

$$5 \cdot 180° - (5-2) \cdot 180° = 900° - 540° = 360°.$$

Analog erhält man für jedes n-Eck die Außenwinkelsumme

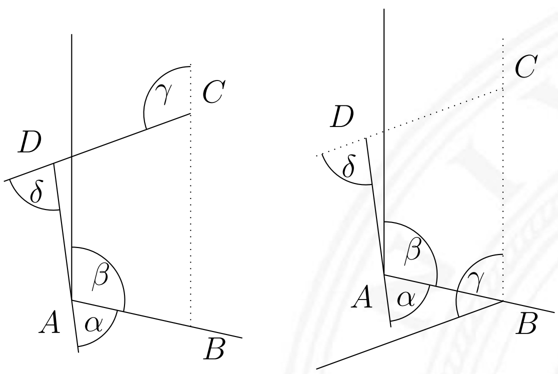
$$n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°.$$

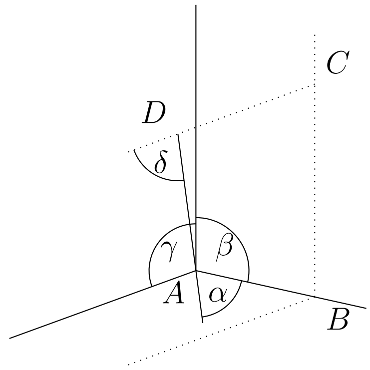
Bemerkung: Die Formel $(n-2)\cdot 180°$ für die Innenwinkelsumme im n-Eck erhält man (zumindest für konvexe n-Ecke), indem man das n-Eck durch das Einzeichnen von Diagonalen, die jeweils eine Ecke abtrennen, immer weiter in Dreiecke zerlegt. Führt man dies genau $n-3$-mal durch, ist vom n-Eck noch ein Dreieck übrig, so dass man insgesamt $n-2$ Dreiecke mit Innenwinkelsumme von jeweils $180°$ hat. Zusammen sind die Innenwinkel der Dreiecke die Innenwinkel des n-Ecks.

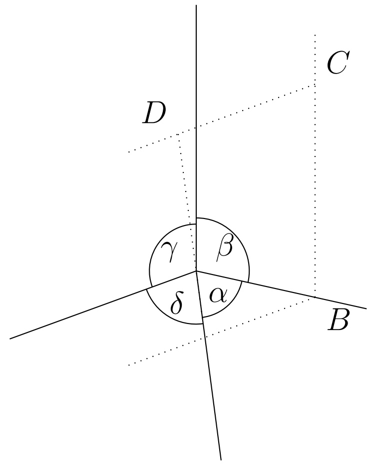


Bemerkung: Man kann auch ohne Verwendung der Innenwinkelsumme im n-Eck zeigen, dass die Außenwinkelsumme stets $360°$ beträgt. Dazu verschiebt man alle Außenwinkel parallel so, dass sie einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben. Zusammen bilden sie dann einen Vollwinkel. Wie wir im Folgenden zeigen werden, ergibt sich dadurch ein Winkel, der ein Vielfaches von $360°$ ist.

In den nachfolgenden Zeichnungen werden die Außenwinkel im Beispiel eines Vierecks nacheinander an den Punkt A geschoben. Zunächst wird β entlang AB an A verschoben. Danach wird γ entlang BC und danach entlang AB an A verschoben.





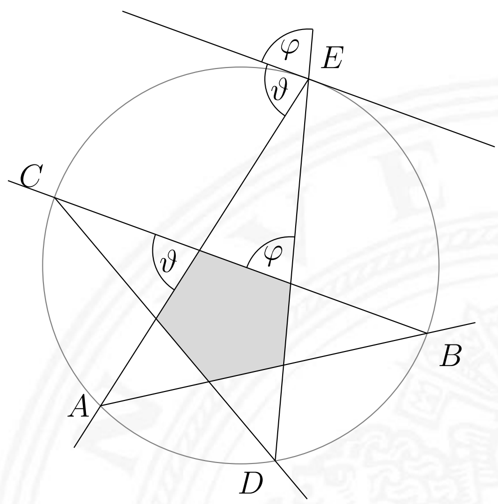


Zuletzt wird noch δ verschoben, wobei man sehen kann, dass es keinen Unterschied macht, ob man nacheinander entlang CD, BC und AB oder direkt entlang AD verschiebt. Also ergibt sich ein Vollwinkel, 360°. Bei einem allgemeinen n-Eck kann man genauso vorgehen, aber wir haben eigentlich nur gezeigt, dass sich ein Vielfaches von 360° ergibt, dass man genau einmal herum kommt, bedarf einer genaueren Überlegung.

(d) Wenn man die Winkel wie in der Bemerkung im vorangegangenen Lösungsteil aneinanderschiebt, müssen sie sich zu einem Vielfachen des Vollwinkels ergänzen. Es ist allerdings nicht ganz klar, um welches Vielfaches es sich handelt. Mit der folgenden Überlegung erhält man, dass die Außenwinkelsumme $2 \cdot 360° = 720°$ beträgt:

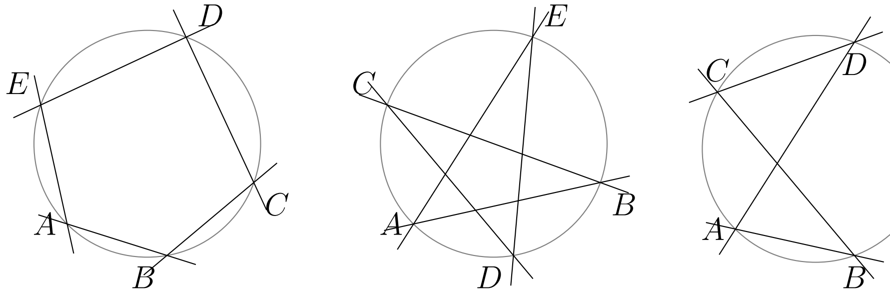
Die inneren Schnittpunkte der Seiten des überschlagenen Fünfecks bilden ein konvexes Fünfeck (grau in der Abbildung).

Zwei Außenwinkel zu benachbarten Ecken des konvexen Fünfecks (φ und ϑ im Beispiel) liegen in einem Dreieck mit einem Eckpunkt (E) des überschlagenen Fünfecks. Als Stufenwinkel an der Parallelen ihrer gemeinsamen Seite (Teil von BC) im konvexen Fünfeck durch den Eckpunkt des überschlagenen Fünfecks (E), ergänzen sie sich zum Außenwinkel ($\varepsilon = \varphi + \vartheta$) an der Ecke ($E$) des überschlagenen Fünfecks.



Durchläuft man einmal das überschlagene Fünfeck und zählt dabei alle Außenwinkel zusammen, erhält man dabei also die gleiche Summe, als wenn man das innere, konvexe Fünfeck zweimal durchläuft und dabei jeweils an einer Ecke den Außenwinkel addiert.

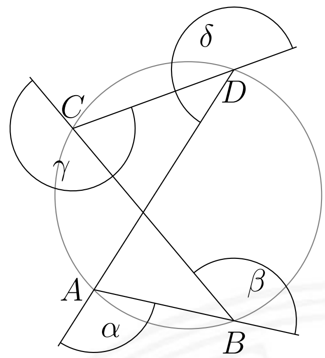
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Die Schwierigkeit einer sinnvollen Definition von Außenwinkeln wird deutlich, wenn man neben den Polygonen ohne Überschneidungen (links in der folgenden Abbildung), dem „Stern" aus dem vorherigen Aufgabenteil (Mitte) noch ein Viereck mit Überschneidung betrachtet:



Beim überschlagenden Viereck ist nicht klar, was überhaupt das „Innere" und das „Äußere" des Vierecks ist. Zumindest lässt sich das nur so festlegen, dass sich beim Durchlaufen des Polygonzuges abwechselt, ob das „Innere" rechts oder links liegt.

Trotz dieser Problematik wollen wir *Außenwinkel entlang des Polygonzuges* definieren. Wir müssen eine Wahl der Richtung des Polygonzuges treffen, von der dann auch abhängt, welches die Außenwinkel sind:

Entlang des Streckenzuges sei der Außenwinkel an einem Eckpunkt immer der Winkel von der Verlängerung der vorherigen Seite gegen den Uhrzeigersinn zur nachfolgenden Seite (wie in der Beispielabbildung rechts).



Für die Ermittlung der Außenwinkelsumme hat diese Definition den Vorteil, dass man die oben in den Bemerkungen geschilderte Strategie, aufeinanderfolgende Winkel aneinander zu schieben, hier ebenfalls anwenden kann. Dadurch, dass der Winkel immer gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird, addieren sich die Außenwinkel zu Vielfachen des Vollwinkels.

Um zu ermitteln, wie viele Vollwinkel die Summe der Außenwinkel einnimmt, beginnt man bei einem Punkt (im Beispiel A) und ermittelt gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreises jeweils, welches der nächste Punkt entlang des Streckenzuges ist (im Beispiel zunächst B, dann C und zuletzt D). Jedes mal, wenn man dabei A überschreitet, wird ein Vollwinkel vervollständigt (im Beispiel überschreitet man A, wenn man im Uhrzeigersinn entlang des Kreises von C zu D geht).

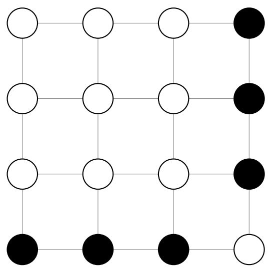
Wie schon in der Bemerkung oben müssen noch weitere Überlegungen angestellt werden, weshalb das Zählen der Vollwinkel so funktioniert.

Hinweis zur Definition: Mit anderen, vielleicht sogar sinnvolleren, Definitionen von Außenwinkel erhält man andere Außenwinkelsummen.

Lösungen 9, 10

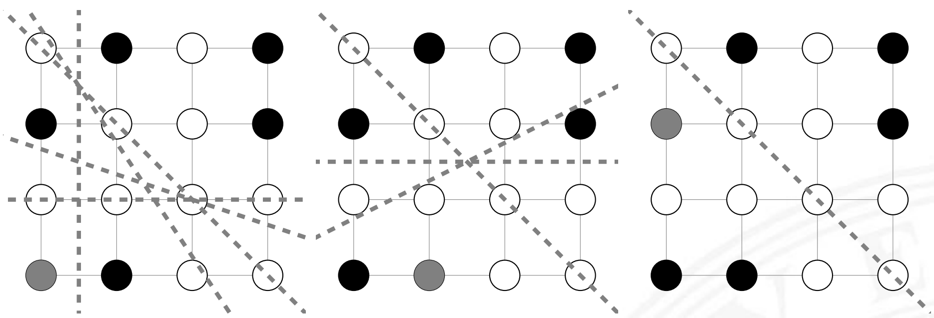
Lösung 1. (a) Beliebige vier der Punkte im nächsten Aufgabenteil haben diese Eigenschaft.

(b) In den folgenden Zeichnungen sind sogar sechs Punkte mit der Eigenschaft markiert:



Dreiecke aus markierten Punkten bestehen hier stets aus zwei Punkten unten und einem rechts oder zwei Punkten rechts und einem unten. In jedem Fall ist die Seitenlänge der Seite entlang der Gitterlinie ganzzahlig (wir können einfach voraussetzen, dass der Gitterabstand die Länge eins hat), während die anderen beiden nicht ganzzahlig und verschieden sind, wie man leicht nachrechnen kann.

Bemerkung: Es ist auch möglich sechs Punkte auszuwählen, ohne dass drei Punkte auf einer Geraden gewählt werden, allerdings ist es dann etwas mühsamer zu überprüfen, dass keine gleichschenkligen Dreiecke vorkommen:



Überprüft man für jedes Paar markierter Punkte, dass auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke kein weiterer markierter Punkt liegt, so stellt man fest, dass es keine gleichschenkligen Dreiecke aus markierten Punkten gibt. Auf Grund der Symmetrie gibt es nur drei *Klassen* von Punkten, die man überprüfen muss. Eine Klasse besteht dabei jeweils aus den Punkten besteht, die durch Spiegelung an der Diagonalen von links-oben nach rechts-unten ineinander übergehen. In den drei Zeichnungen sind jeweils für einen Vertreter einer Klasse (grauer Punkt) die Mittelsenkrechten eingezeichnet, wobei Kombinationen mit schon vorher behandelten Klassen nicht noch einmal überprüft werden müssen.

(c) Teilt man die 4×4 Punkte in viermal 2×2 Punkte auf, so müssen von den neun ausgewählten Punkten in mindestens einem 2×2-Block drei Punkte ausgewählt sein (Argumente dieser Art sind als *Schubfachprinzip* bekannt). Diese bilden immer ein gleichseitiges Dreieck, wobei die doppelte Seitenlänge genau der Gitterabstand ist.

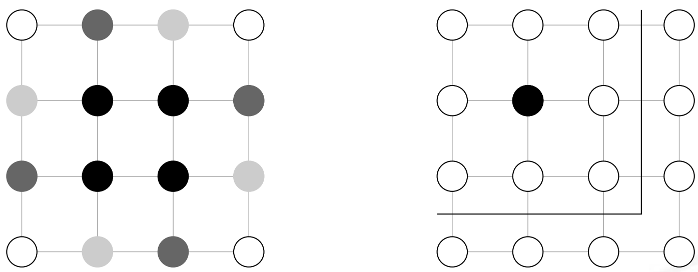
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). (a) Eine Auswahl mit sechs Punkten wurde bereits oben angegeben.

(b) Zuerst verallgemeinern wir die Beobachtung aus dem vorigen Aufgabenteil.

Von vier Punkten im Gitter, die die Eckpunkte eine Quadrates bilden, können maximal zwei Punkte ausgewählt werden, da jeweils drei Eckpunkte eines Quadrats die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Angenommen man kann sieben Punkte aus den 16 Punkten des Gitters so auswählen, dass diese nicht die Ecken eines gleichseitigen Dreieck enthalten. Im Folgenden werden wir diese Annahme zum Widerspruch führen.

Zuerst zerlegen wir die 16 Punkte des Gitters in die Eckpunkte von vier Quadraten (siehe Punkte mit dem selben Grauton in der linken Abbildung).

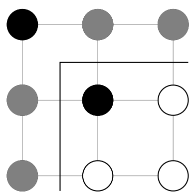


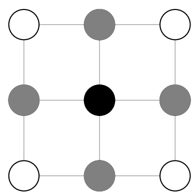
Da wegen der Beobachtung die sieben Punkte nicht auf die Ecken von drei Quadraten aufgeteilt werden können (dann würde eines dieser drei Quadrate nämlich drei Punkte erhalten), muss jedes Quadrat mindestens einen der sieben gewählten Punkte enthalten. Insbesondere muss einer der vier mittleren Punkte (schwarz im linken Bild oben) gewählt worden sein. Jeder dieser vier mittleren Punkte ist der Mittelpunkt eines der 3×3 Eckpunkte eines quadratischen Gitters, welches in dem Originalgitter enthalten ist. Wir zerlegen 16 Eckpunkte des Originalgitters in diese 9 Eckpunkte und den Rest (ein

Winkelstück bestehend aus sieben Punkten). Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Gitters können wir einfach annehmen, dass wir das rechte Bild in der Abbildung oben erhalten.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass aus den 9 quadratisch angeordneten Eckpunkten noch maximal zwei weitere ausgewählt werden können und dass aus dem Winkelstück nur drei Punkte ausgewählt werden können, ohne dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Somit können insgesamt nur sechs Punkte ausgewählt werden, was aber der oben gemachten Annahme widerspricht.

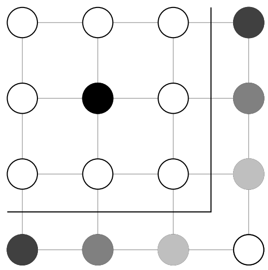
Wir beginnen mit den 9 Punkten. Falls neben dem Mittelpunkt noch einer der äußeren vier Eckpunkte ausgewählt wurde, dann kann kein weiterer Punkt aus den Schenkeln des Winkels mit diesem Eckpunkt ausgewählt werden (siehe graue Punkte im linken Bild unten). Die restlichen vier Punkte sind wieder die Ecken eines Quadrats und da sie den ausgewählten Mittelpunkt enthalten, kann darin höchstens noch ein weiterer Punkt ausgewählt werden, was insgesamt höchstens 3 ausgewählte Punkte ergibt.





Wir können also annehmen, dass keiner der äußeren vier Eckpunkte ausgewählt wurde. Die restlichen vier Punkte (siehe graue Punkte im rechten Bild) bilden wieder ein Quadrat und deswegen können von diesen höchstens zwei ausgewählt werden, was zusammen mit dem Mittelpunkt maximal drei ausgewählte Punkte ergibt.

Als nächstes betrachten wir die sieben Punkte des Winkelstücks. Das Winkelstück ist spiegelsymmetrich zu der Diagonalen, welche den bereis gewählten zentralen Punkt enthält. Deswegen kann von je zwei spiegelsymmetrisch liegenden Punkten des Winkels höchstens ein Punkt ausgewählt sein (siehe Punkte mit dem selben Grauton im nächsten Bild). Falls also der Eckpunkt ganz rechts-unten (weisser Punkt auf dem Winkelstück) nicht ausgewählt wurde, dann können von dem Winkel höchstens drei Punkte ausgewählt worden sein (höchstens einer von jedem Grauton) und wir sind unter der Annahme fertig, dass der weiße Eckpunkt nicht ausgewählt wurde.



Falls aber der Eckpunkt ausgewählt wurde, dann kann keiner der beiden mittelgrauen Punkte mehr gewählt werden. Es kann also nur noch je ein dunkelgrauer und ein hellgrauer Punkt ausgewählt werden. Somit können auch in diesem Fall höchstens drei Punkte des Winkelstücks ausgewählt werden, was die Argumentation in dem Fall abschließt, dass der weiße Eckpunkt ausgewählt wurde.

Lösung 2. (a) Da die letzte Ziffer von $c(n)$ nur jeweils von der letzten Ziffer von $a(n)$ und $b(n)$ abhängt und diese jeweils konstant ist, ist auch die letzte Ziffer von $c(n)$ stets 6, die Zahl also nicht durch 10 teilbar.

(b) $c(1) = a(1) \cdot b(1) + 1 = 1 \cdot 15 + 1 = 16 = 4^2$, $c(2) = 11 \cdot 105 + 1 = 1156 = 34^2$ und $c(3) = 111 \cdot 1005 + 1 = 111556 = 334^2$ sind alle Quadratzahlen.

(c) $c(n)$ besteht immer aus n Einsen, $n - 1$ Fünfen und einer Sechs (in der Reihenfolge). Dass $a(n)\cdot b(n)$ immer aus n Einsen und n Fünfen besteht, kann man direkt an der schriftlichen Multiplikation ablesen (wobei die Punkte jeweils für $n - 4$ gleiche Ziffern stehen):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5
\end{array}$$

(d) Die Zahl $b(n)$ hat $n+1$ Stellen und die Ziffernfolge von $b(n)-6$ besteht aus n Neunen. Aus dieser Beobachtung erhalten wir die Identität

$$b(n) = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ Stellen}} + 6 = 9a(n) + 6\,.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
a(n) \cdot b(n) &= a(n) \cdot \big(9a(n) + 6\big) \\
&= 3a(n) \cdot (3a(n) + 2) \\
&= \big((3a(n) + 1) - 1\big) \cdot \big((3a(n) + 1) + 1\big) \\
&= (3a(n) + 1)^2 - 1\,,
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Identität die dritte binomische Formel genutzt wurde. Folglich ist

$$c(n) = a(n) \cdot b(n) + 1 = (3a(n) + 1)^2$$

eine Quadratzahl.

Alternativ kann man auch mit der 1. Binomischen Formel nach der ersten Zeile der Rechnung sofort sehen, dass

$$c(n) = a(n) \cdot b(n) + 1 = 9a(n)^2 + 6a(n) + 1 = (3a(n) + 1)^2.$$

Bemerkung: Alternativ kann man auch direkt ausrechnen: Es bestehe $q(n)$ aus n Dreien und einer Vier. Man berechnet $q(n)^2 =$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 4 & \cdot & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & \\
 & & & & & & 1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 6 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 5 & 5 & \dots & 5 & 6
\end{array}$$

und stellt fest, dass dies gerade $c(n)$ ist.

Lösung 3. (a) Mit Nenner pq lautet der Bruch

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2 + q^2}{pq}.$$

Angenommen p^2+q^2 ließe sich durch p teilen. Da p^2 durch p teilbar ist, müsste dann auch q^2 durch p teilbar sein, was aber für verschiedene Primzahlen p und q unmöglich ist. (Mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung müsste dann nämlich schon q durch p teilbar sein, was auf Grund der Unzerlegbarkeit von q nicht möglich ist.) Dass sich $p^2 + q^2$ nicht durch q teilen lässt, folgt analog.

(b) Ist $\mathrm{ggT}(rs, r^2 + s^2) > 1$, so gibt es eine Primzahl z, die sowohl Teiler von rs, als auch Teiler von $r^2 + s^2$ ist. Ohne Einschränkung sei z Teiler von r. Da $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ ist, ist z kein Teiler von s, also auch kein Teiler von s^2. z kann also auch kein Teiler von $r^2 + s^2$ sein, da z Teiler von r^2 ist. Da also für teilerfremde r und s stets $\mathrm{ggT}(rs, r^2 + s^2) = 1$ gilt, ist $\frac{r^2+s^2}{rs}$ also auch immer ausgekürzt.

(c)
- Ersetzt man in der obigen Argumentation + durch −, erhält man auch, dass $p^2 - q^2$ keinen gemeinsamen Teiler mit pq hat.
- $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$ kann als Produkt nur eine Primzahl sein, wenn ein Faktor 1 ist, was nur für $p - q$ zutreffen kann. Für Primzahlen $p > q$ ist $p - q = 1$ nur für $p = 3$ und $q = 2$ erfüllt, in allen anderen Fällen ist $p^2 - q^2$ also sicher keine Primzahl. Für $p = 3$ und $q = 2$ berechnet man, dass $p^2 - q^2 = 5$ eine Primzahl ist.

  Bemerkung: Man kann sich dieselbe Frage auch für $p^2 + q^2$ stellen: Für $q > 2$ sind p und q beide ungerade, $p^2 + q^2$ also gerade und größer 2 und somit keine Primzahl. Für $q = 2$ sind zum Beispiel $2^2 + 3^2 = 13$ und $2^2 + 5^2 = 29$ Primzahlen, $2^2 + 11^2 = 125$ und $2^2 + 19^2 = 365$ aber nicht.

Lösung 4. (a) Die Dreiecke ΔAMB, ΔBMC und ΔCMA sind gleichschenklich, da jeweils zwei Seiten Radien des Kreises K sind. Mit $\angle ACB = \gamma$ ist also

$$\angle CBM + \angle MAC = \angle MCB + \angle ACM = \gamma.$$

Wegen $\angle BAM = \angle MBA$ ist im Dreieck ΔABC die Innenwinkelsumme $180° = 2\gamma + 2\angle BAM$, also gilt

$$\angle BAM = 90° - \gamma.$$

Da der Winkel zwischen Radius und Tangente liegt, ist $\angle TAM = 90°$. Folglich ist

$$\angle TAB = \gamma.$$

Analog ist wegen $\angle MBA = 90° - \gamma$ auch

$$\angle ABT = \gamma.$$

(b) Da g parallel zu AC verläuft, ist ΔEBD ähnlich zu ΔABC. Wie im vorherigen Teil gezeigt, ist $\angle TAB = \angle ACB$, da außerdem $\angle AET = \angle BED$, sind auch ΔETA und ΔEBD ähnlich.

(c) Auf Grund der gerade festgestellten Ähnlichkeit ist

$$\frac{|DE|}{|BE|} = \frac{|AE|}{|TE|},$$

was zusammen mit $\angle TEB = \angle DEA$ bedeutet, dass ΔTBE und ΔAED ebenfalls ähnlich sind. Mit nochmaliger Verwendung vom ersten Aufgabenteil erhält man also

$$\angle ADE = \angle EBT = \angle ABT = \gamma.$$

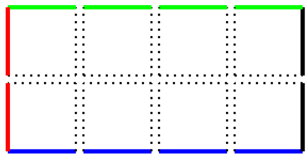
(d) Da g und AC parallel verlaufen, ist

$$\angle DAC = \angle ADE = \gamma.$$

Das Dreieck ΔADC hat also gleiche Winkel bei A und C und ist somit gleichschenklig.

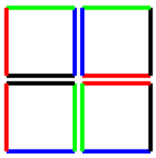
Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. Bei allen Lösungen gehen wir davon aus, dass die Randfärbung des Rechtecks jeweils wie folgt vorgegeben ist:

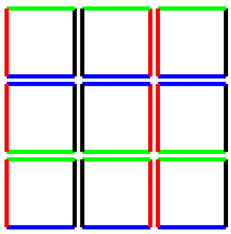


der obere Rand soll also grün, der untere blau, der rechte schwarz und der linke rot sein.

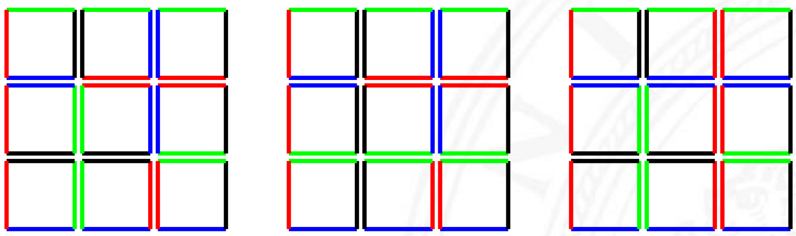
(a) Für ein 2×2-Rechteck gibt es dann genau eine Lösung. Da die beiden Quadrate in der ersten Zeile bereits eine grüne Seite vorgegeben haben und die beiden Quadrate in der zweiten Zeile noch einen grünen Rand benötigen, muss die gemeinsame Seite zwischen den beiden unteren Quadraten grün sein. Genauso argumentiert man ausgehend von der blauen, schwarzen und roten Seite und erhält die folgende eindeutige Lösung.

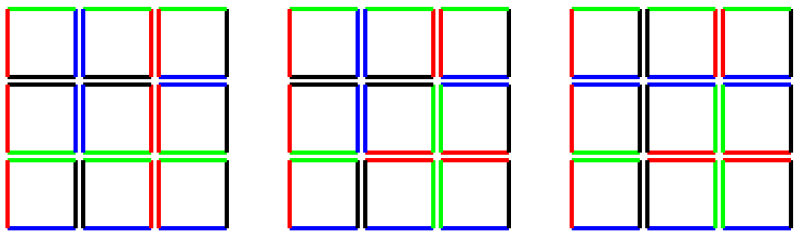


(b) Für das 3×3-Rechteck gibt es mehrere Möglichkeiten. In der einfachsten Variante „übernehmen" wir die Randfärbung indem die vertikalen Ränder abwechselnd durchgängig schwarz und rot gefärbt werden und die horizontalen abwechselnd blau und grün einfärben:

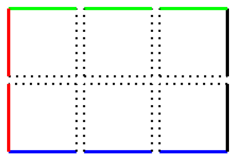


Bemerkung: Allerdings gibt es ist hier noch sechs weitere Lösungen:





(c) Nach der oben genannten Vereinbarung ist die folgende Randfärbung vorgegeben:



Alle drei Quadrate in der unteren Reihe benötigen noch einen grünen Rand. Da aber die drei oberen Quadrate bereits einen grünen Rand haben, können nur noch die vertikalen Seiten der unteren Quadrate grün gefärbt werden. Wenn einer dieser Ränder grün ist, dann erhalten nur zwei der drei unteren Quadrate einen grünen Rand und wenn beide grün gefärbt werden, dann hat das mittlere Quadrat zwei grüne Ränder, was auch verboten ist. Es ist also unmöglich die freien Ränder der unteren Quadrate so einzufärben, dass jedes Quadrat genau eine grüne Seite bekommt.

(d) Wir zeigen zuerst, dass es immer eine Lösung gibt, falls $m + n$ gerade ist. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder ist sowohl m als auch n ungerade oder beide Zahlen sind gerade.

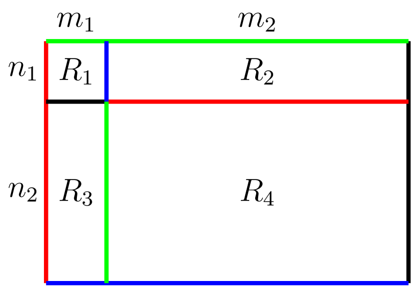
Falls m und n ungerade sind, dann können wir die erste Lösung des 3×3-Falles aus Aufgabenteil b verallgemeinern. D. h. wir färben abwechselnd die vertikalen Ränder schwarz und rot und die horizontalen Ränder blau und grün. Da sowohl m als auch n ungerade sind, geht diese Einfärbung genau auf, und da jedes Quadrat zwei hintereinander liegende vertikale und horizontale Seiten hat, erhält es so alle vier Farben.

Den Fall, wenn m und n gerade sind, führen wir auf den ungeraden Fall zurück. Da m und $n \geq 2$, gibt es ungerade natürliche Zahlen m_1, m_2 und n_1, n_2 mit

$$n_1 + n_2 = n \quad \text{und} \quad m_1 + m_2 = m\,.$$

Die genaue Wahl von m_1, m_2, n_1 und n_2 ist hier irrelevant, z. B. könnten wir $m_1 = n_1 = 1$ und $m_2 = m - 1$ und $n_2 = n - 1$ wählen.

Als nächstes zerlegen wir das vorgegebene $n \times m$-Rechteck in vier Rechtecke R_1, R_2, R_3 und R_4 mit den Seitenlängen $n_1 \times m_1$, $n_1 \times m_2$, $n_2 \times m_1$ und $n_2 \times m_2$ auf und färben die Ränder wie folgt ein.



Jedes der vier entstandenen Rechtecke $R_1, \ldots, R_4$ hat ungerade Seitenlängen und jede Seite ist mit einer anderen Farbe markiert. Wir können nun den bereits gelösten Fall (m und n ungerade) für jedes dieser vier Rechtecke anwenden und erhalten somit eine Lösung für m und n gerade.

Zum Schluss zeigen wir noch, dass es keine Lösung gibt, wenn $m + n$ ungerade ist. In diesem Fall ist eine Seitenlänge gerade und die andere ungerade. Wir argumentieren hier für den Fall, dass die Höhe n ungerade ist. Für den anderen Fall vertauscht man einfach m und n im folgenden Beweis.

Wir benutzen ein einfaches *Paritätsargument*: Insgesamt soll das Rechteck mit $M = m \cdot n$ Quadraten ausgefüllt werden. Da m gerade ist, ist auch M gerade. Durch die vorgegebene Färbung des Randes haben bereits n Quadrate einen roten Rand. Die restlichen $M - n$ Quadrate brauchen noch eine rote Seite und da M gerade ist und n ungerade ist, ist $M - n$ ebenfalls ungerade. D. h. eine ungerade Anzahl von Quadraten benötigen noch einen roten Rand. Da sich aber immer zwei dieser $M - n$ Quadrate einen roten Rand teilen, kann es keine solche Zuordnung geben.

Lösung 2. Es sind die Nullstellen von $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 - x$ zu bestimmen.

Jede Nullstelle x definiert ein y, so dass

$$x^2 - 3x + 3 = y \quad \text{und} \quad y^2 - 3y + 3 = x.$$

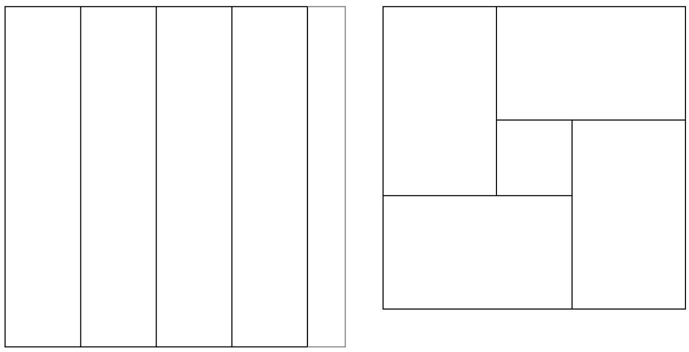
Auch die Umkehrung gilt: Zu jedem Lösungspaar (x, y) obiger beider Gleichungen ist x eine Nullstelle von $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 - x$. Im Folgenden zeigen wir, dass $x = y$, dann sind lediglich die Lösungen von $x^2 - 4x + 3 = 0$ zu bestimmen; diese sind $x = 1$ und $x = 3$. Um $x = y$ zu zeigen, multiplizieren wir die obigen beiden Gleichungen:

$$x(x^2 - 3x + 3) = y(y^2 - 3y + 3)$$

Um $x = y$ einzusehen, genügt es zu zeigen, dass $g(x) := x(x^2 - 3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x$ streng monoton wachsend ist. Da $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$, ist g auf den offenen Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$ streng monoton wachsend und es gilt für $x \in (-\infty, 1)$ und $y \in (1, \infty)$, dass $x < g(1) < y$, womit g streng monoton wachsend ist.

Alternativer Beweis (Skizze): Multipliziert man $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 - x$ aus, so erhält man folgendes Polynom vierten Grades: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$. Also kann die Gleichung maximal vier Lösungen haben. Durch Raten erhält man die Lösungen $x = 1$ und $x = 3$. Man führt eine Polynomdivision mit $x - 1$ und $x - 3$ durch und erhält $f(x) = (x-1)(x-3)(x^2 - 2x - 1)$. Mit Hilfe der 2. Binomischen Formel folgt $f(x) = (x-1)^3(x-3)$. Also hat die Gleichung $f(x) = 0$ nur die Lösungen $x = 1$ und $x = 3$. Bemerkung: f hat an der Stelle 3 eine einfache und an der Stelle 1 eine dreifache Nullstelle, die somit auch eine Wendestelle (ein Sattelpunkt) ist.

Lösung 3. (a) Vier 2×9-Rechtecke kann man wie in der folgenden Abbildung gezeigt in ein 9×9-Quadrat legen, vier 3×5-Rechtecke in ein 8×8-Quadrat:



Begründung, dass keine kleineren Quadrate möglich sind: Eine kleinere Quadrat-Seitenlänge als die größere Rechteck-Seitenlänge ist nie möglich, weshalb auch die erste Quadrat-Seitenlänge 9 optimal ist.

Wenn eine kleinere Quadrat-Seitenlänge als die Summe der Rechteck-Seitenlängen benutzt werden soll, darf keiner kürzeren Rechteckseite ein weiteres Rechteck anliegen. Die Rechtecke müssen also alle entlang ihrer längeren Seiten aneinander liegen. Da aber $4 \cdot 3 > 5 + 3$, würde man mit der Anordnung mit zweiten Fall ein größeres Quadrat benötigen, die Quadrat-Seitenlänge $3 + 5 = 8$ ist also optimal.

(b) In der Begründung im vorherigen Teil lassen sich die Zahlen sofort durch allgemeine Rechteck-Seitenlängen $a \geq b$ ersetzen: Ist $a + b \geq 4 \cdot b$, so ist das Maximum von a und $4 \cdot b$ die optimale Quadrat-Seitenlänge. Ist $a + b \leq 4 \cdot b$, so führt die zweite Anordnung auf die optimale Quadrat-Seitenlänge $a + b$.

(c) Betrachtet man die Fächeninhalte in der zweiten Anordnung, so kann man ablesen, dass grundsätzlich $(a+b)^2 \geq 4 \cdot ab$ gilt. Durch Wurzelziehen und Division durch 2 erhält man wie gewünscht

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Lösung 4. (a) Sigmars Liste ist wie folgt:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	4	3	1	2	5

Das ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Da Herr Eins zunächst in Zimmer 4 umgezogen ist und nun in Zimmer 2 wohnt, steht an der Tür von Zimmer 4 die Aufforderung, in Zimmer 2 umzuziehen. Da Herr Vier inzwischen in Zimmer 3 wohnt, wird an Zimmer 2 dazu aufgefordert, in das Zimmer 3 zu ziehen. Herr Zwei wohnt inzwischen in Zimmer 1, dorthin sollte also Herr Drei ziehen. Damit sind die ersten vier Einträge von Sigmars Gästeliste ermittelt, daraus ergibt sich der fünfte Eintrag: Herr Fünf ist korrekt bei Zimmer 5 eingetragen.

(b) In der vierten Nacht befinden sich zum erstem Mal alle Gäste wieder in ihren ursprünglichen Zimmern. Diese Aussage erhält man entweder durch Ausprobieren oder durch die folgende Beobachtung: Die Gäste aus den Zimmern 1 bis 4 tauschen ihre Zimmer „im Kreis“: Der Bewohner von Zimmer 1 zieht in Zimmer 4, der Bewohner von Zimmer 4 zieht in Zimmer 2, der Bewohner von Zimmer 2 zieht in Zimmer 3 und der Bewohner von Zimmer 3 zieht wiederum in Zimmer 1. Jeder dieser vier Gäste wohnt also nach vier Umzügen zum ersten mal wieder in seinem ursprünglichen Zimmer. Herr Fünf bleibt immer im selben Zimmer, daher wohnen in der vierten Nacht dann alle Gäste wieder im selben Zimmer wie direkt nach der Anreise.

(c) Die Liste könnte wie folgt aussehen:

Name	Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf
Zimmernummer	4	5	1	2	3

Stellt man sich die Zimmer 1, 2, 3, 4 und 5 in dieser Reihenfolge im Kreis angeordnet vor, so dass nach Zimmer 5 wieder Zimmer 1 folgt, so zieht jeder Gast nach jedem Abendessen dann immer drei Zimmer weiter. Nach dem zweiten Umzug ist jeder Gast dann sechs Zimmer weiter gezogen. Da es nur fünf Zimmer gibt, landet er dabei im selben Zimmer, als wenn er nur ein Zimmer weiter gezogen wäre.

Bemerkung: Dies ist sogar die einzige Möglichkeit für die Liste: Aus der Verteilung für den zweiten Tag ergibt sich, dass jeder Gast im Laufe der Zeit in alle Zimmer umzieht. Denn das gilt sogar, wenn man nur jede zweite Nacht betrachtet. Wenn ein Gast in ein Zimmer zieht, das er vorher bereits schon einmal bewohnt hat, erreicht er auch danach keine neuen Zimmer mehr. Daher wohnt jeder Gast erst nach dem fünften Umzug in einem Zimmer, das er bereits bewohnt hat. Dies muss sein ursprüngliches Zimmer sein, da man andernfalls zwei von zwei verschiedenen Zimmern aus in dasselbe Zimmer umziehen müsste. Also wohnen in der fünften Nacht alle Gäste in ihren ursprünglichen Zimmern und in der sechsten Nacht ist die Verteilung wieder wie in der ersten Nacht. Da man die Verteilung für jede zweite Nacht aus der Verteilung in der zweiten Nacht ermitteln kann, gibt es nur diese eine Möglichkeit.

(d) In der 121sten Nacht stimmt die Gästeverteilung wieder mit Sigmars Liste überein: Jeder Gast zieht spätestens beim fünften Umzug in ein Zimmer, dass er bereits bewohnt hat. Dieses Zimmer kann nur sein ursprüngliches Zimmer sein, weil man sonst aus zwei verschiedenen Zimmern in dasselbe Zimmer gelangen würde. Anschließend wiederholen sich alle seine Umzüge wieder. Da 120 durch jede der Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 teilbar ist, schläft jeder Gast in der 121ten Nacht wieder im selben Zimmer wie in der ersten Nacht.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt).

- Jeder Bewohner muss spätestens in der n-ten Nacht wieder in ein Zimmer ziehen, dass er bereits bewohnt hat. Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt, dass das erste Zimmer, dass er zum zweiten Mal bezieht, sein ursprüngliches Zimmer sein muss.

- Da es für jeden Gast ein m zwischen 1 und n gibt, so dass sich seine Umzüge immer nach m Nächten wiederholen, wohnen für $k = \mathrm{kgV}(1, \ldots, n)$ in der k-ten Nacht alle Bewohner wieder in ihren ursprünglichen Zimmern. Das ist auch das kleinste k, das diese Eigenschaft für jede mögliche Liste von Sigmar hat: Für jede Zahl l zwischen 1 und n gibt es eine Liste, so dass genau in jeder l-ten Nacht alle Gäste in ihren ursprünglichen Zimmern wohnen. Zum Beispiel könnte sein, dass der ursprüngliche Bewohner aus Zimmer l bei Zimmer 1 eingetragen ist, für i zwischen 1 und $l - 1$ die ursprünglichen Bewohner von Zimmer i bei Zimmer $i + 1$ eingetragen sind und alle anderen Einträge der Liste korrekt sind, so dass die entsprechenden Bewohner nicht umziehen müssen. Daher muss jedes solche k durch alle Zahlen von 1 bis n teilbar sein, das kleinste solche k ist $\mathrm{kgV}(1, \ldots, n)$.