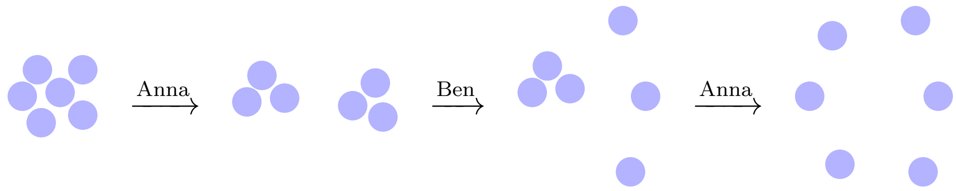
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (2+10+8 Punkte)**.** Anna und Ben spielen ein Spiel mit Kieselsteinen: Am Anfang liegen alle Steine auf einem Haufen. Ein Zug besteht darin, einen der Haufen in mehrere Haufen mit gleich vielen Steinen zu zerlegen. Beide Spieler ziehen abwechselnd, Anna beginnt. Das Spiel endet, wenn alle Haufen aus nur einem Stein bestehen. Wer als letztes gezogen hat, verliert das Spiel.

Zum Beispiel könnte ein Spiel mit sechs Kieselsteinen so verlaufen:



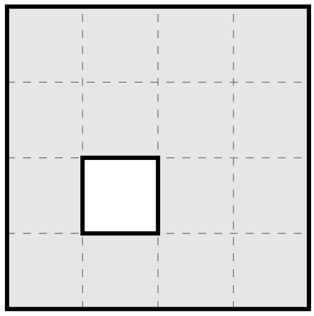
Anna teilt den Haufen aus sechs Steinen in zwei Haufen aus jeweils drei Steinen. Ben zerlegt einen dieser Haufen in drei Haufen aus nur jeweils einem Stein. Anschließend kann Anna nur noch den anderen Haufen aus drei Steinen zerteilen. Da danach alle Steine getrennt liegen, endet das Spiel und Ben hat gewonnen.

(a) Könnte das Spiel mit 6 Steinen auch so verlaufen, dass Anna gewinnt? Kann Anna so spielen, dass Ben das nicht verhindern kann?

(b) Entscheidet jeweils auch für das Spiel mit 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 bzw. 10 Steinen welcher Spieler so spielen kann, dass er in jedem Fall gewinnt: Begründet jeweils, dass er bei allen möglichen Zügen des Gegners erreichen kann, dass der Gegner den letzten Zug machen muss.

(c) Bei welchen Anzahlen n von Steinen (mit $n \geq 2$) kann Anna in jedem Fall gewinnen, bei welchen Ben?

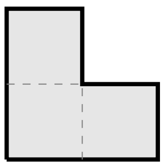
Aufgabe 2 (3+6+6+5 Punkte)**.** Aus dem abgebildeten 4×4-Quadrat wurde eines der Kästchen (ein 1×1-Quadrat) entfernt:



(a) Welche verschiedenen Formen kann man durch Entfernen eines Kästchens aus einem 4×4-Quadrat erhalten?

(Zwei Formen sind *verschieden*, wenn sie sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen.)

Ein *L-Triomino* besteht aus drei Kästchen, das mittlere Kästchen hat zwei benachbarte Seiten mit jeweils einem der anderen Kästchen gemeinsam:



(b) Zeigt, dass jede der im letzten Aufgabenteil gefundenen Formen mit L-Triominos ausgelegt werden kann. Dabei soll die gesamte Fläche überdeckt werden, ohne dass sich die L-Triominos überschneiden.

(c) Aus einem 8×8-Quadrat wird ein beliebiges Kästchen entfernt. Zeigt, dass sich die so erzeugte Form mit L-Triominos auslegen lässt.

(d) Aus einem Quadrat der Größe $2^n \times 2^n$ (also $2^1 \times 2^1$, $2^2 \times 2^2$, $2^3 \times 2^3$, ...) wird ein beliebiges Kästchen entfernt. Zeigt, dass sich die so erzeugte Form in jedem Fall mit L-Triominos auslegen lässt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Gibt es noch mehr $k \times k$-Quadrate mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 3 (5+5+5+5 Punkte)**.** Von drei positiven ganzen Zahlen a, b und c (die nicht unbedingt verschieden sein müssen) bekommt der Zauberer Saruman die Summe $S = a + b + c$ genannt, der Zauberer Petrosilius das Produkt $P = a \cdot b \cdot c$. Keiner von beiden kennt die drei Zahlen selbst. Saruman kennt das Produkt nicht und Petrosilius kennt die Summe nicht.

Saruman stellt fest: „Wenn ich wüsste, dass deine Zahl größer ist als meine, könnte ich die drei Zahlen nennen.“

Daraufhin sagt Petrosilius: „Meine Zahl ist aber kleiner als deine und ich kann dir jetzt die drei Zahlen nennen.“

(a) Ermittelt die kleinste Summe S, so dass es eine Möglichkeit gibt, für die das Produkt P größer ist als S. (So groß muss S also mindestens sein.) Erklärt, warum es keine solche Möglichkeit für kleinere Summen gibt.

(b) Ermittelt eine Summe S, so dass es nur eine Möglichkeit für die drei Summanden gibt (bis auf die Reihenfolge), wenn P größer ist als S.

(c) Zeigt, dass es für noch größere Summen S immer mehrere Möglichkeiten für die drei Summanden gibt, wenn P größer ist als S.

(d) Welches Produkt P kennt der Zauberer Petrosilius und welche drei Zahlen konnte er deshalb nennen?

Aufgabe 4 (10+5+5 Punkte)**.** Hier seien a, b, c und d immer positive ganze Zahlen (also insbesondere nicht 0). Damit kann man nun verschiedene ganze Zahlen n darstellen als

$$n = (a^2 + b^2) - (c^2 + d^2),$$

zum Beispiel $n = 13$ als $n = (3^2+3^2)-(2^2+1^2)$. Dagegen ist $13 = (4^2+1^1)-(2^2+0^2)$ nicht zulässig, da 0 nicht positiv ist.

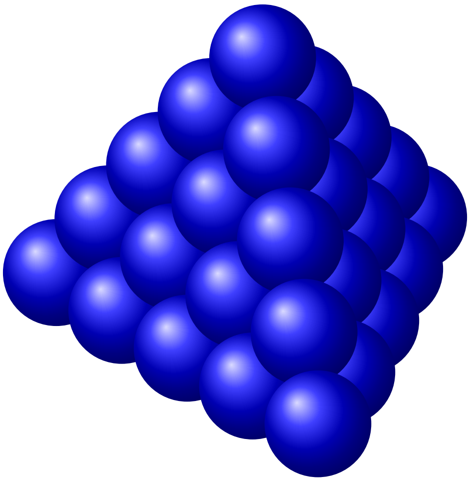
(a) Findet jeweils mögliche a, b, c und d für $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = 10$:

$$\begin{aligned}
1 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
2 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
3 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
4 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
5 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
6 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
7 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
8 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
9 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)\\
10 &= (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2) - (\underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2)
\end{aligned}$$

(b) Zeigt, dass es für jede ungerade Zahl n eine solche Darstellung gibt.

(c) Zeigt, dass es auch für jede gerade Zahl n eine solche Darstellung gibt.

Klassenstufen 9, 10



Aufgabe 1 (4+6+5+5 Punkte)**.** Wir haben einen Vorrat aus gleich großen Kugeln. Aus diesen Kugeln wird jetzt eine Tetraederpyramide gebaut: Eine Kugel bildet die Spitze, die Schicht darunter wird aus drei Kugeln gebildet (die in einem Dreieck liegen), die Schicht darunter – die dritte Schicht – aus sechs Kugeln (wieder im Dreieck) usw. Als Höhe der Pyramide wird die Anzahl ihrer Schichten bezeichnet.

(a) Wie viele Kugeln bilden die zwölfte Schicht?

(b) Ermittelt, welche Höhe für eine Tetraederpyramide aus 1600 Kugeln maximal möglich ist und wie viele Kugeln dann übrig bleiben.

(c) Nun sollen aus den 1600 Kugeln zwei Tetraederpyramiden gebaut werden (die nicht gleich hoch sein müssen). Bestimmt die Höhen der beiden Pyramiden, bei denen die Anzahl der übrig bleibenden Kugeln minimal ist.

(d) Beweist: Eine Pyramide der Höhe n ist aus

$$\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Kugeln aufgebaut.

Aufgabe 2 (4+4+4+8 Punkte). Auf einem Tisch liegen einige Haufen von Münzen. Ein Zug besteht darin, entweder zwei Haufen zu vereinigen oder einen Haufen in zwei Haufen mit gleicher Anzahl von Münzen zu zerlegen.

(a) Zeigt, dass es mit diesen Zügen möglich ist, aus drei Haufen mit 13, 41 und 45 Münzen neun Haufen mit gleicher Anzahl von Münzen zu erzeugen, und beschreibt die dafür verwendeten Züge.

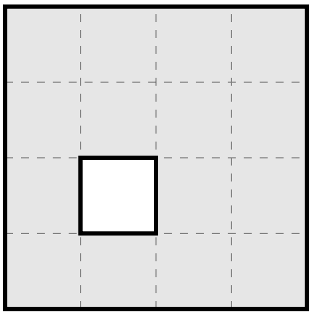
(b) Entscheidet, ob es auch gelingen kann, aus diesen neun Haufen mit den erlaubten Zügen elf gleich umfangreiche Haufen zu erzeugen.

(c) Welche Verteilungen mit nur gleich großen Haufen kann man aus zwei Haufen mit 11 und 13 Münzen erhalten, welche aus zwei Haufen mit 15 und 18 Münzen? Begründet, dass genau diese Verteilungen erzeugbar sind.

(d) Untersucht, in welchen Fällen aus zwei Haufen mit a und b Münzen $a + b$ Haufen mit je einer Münze erzeugbar sind. Begründet, dass es in diesen Fällen möglich und in allen anderen unmöglich ist.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Wann kann man aus drei gegebenen Haufen mit a, b und c Münzen erreichen, dass alle Haufen aus nur einer Münze bestehen?

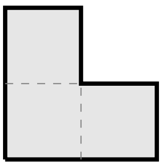
Aufgabe 3 (3+6+6+5 Punkte)**.** Aus dem abgebildeten 4×4-Quadrat wurde eines der Kästchen (ein 1×1-Quadrat) entfernt:



(a) Welche verschiedenen Formen kann man durch Entfernen eines Kästchens aus einem 4×4-Quadrat erhalten?

(Zwei Formen sind *verschieden*, wenn sie sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen.)

Ein *L-Triomino* besteht aus drei Kästchen, das mittlere Kästchen hat zwei benachbarte Seiten mit jeweils einem der anderen Kästchen gemeinsam:



(b) Zeigt, dass jede der im letzten Aufgabenteil gefundenen Formen mit L-Triominos ausgelegt werden kann. Dabei soll die gesamte Fläche überdeckt werden, ohne dass sich die L-Triominos überschneiden.

(c) Aus einem 8×8-Quadrat wird ein beliebiges Kästchen entfernt. Zeigt, dass sich die so erzeugte Form mit L-Triominos auslegen lässt.

(d) Aus einem Quadrat der Größe $2^n \times 2^n$ (also $2^1 \times 2^1$, $2^2 \times 2^2$, $2^3 \times 2^3$, $\ldots$) wird ein beliebiges Kästchen entfernt. Zeigt, dass sich die so erzeugte Form in jedem Fall mit L-Triominos auslegen lässt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Gibt es noch mehr $k \times k$-Quadrate mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 4 (6+6+2+6 Punkte)**.** Sei ΔABC ein beliebiges Dreieck und r der Radius seines Inkreises; mit U sei der Umfang des Dreiecks bezeichnet.

(a) Zeigt: Die Fläche F des Dreiecks ergibt sich zu

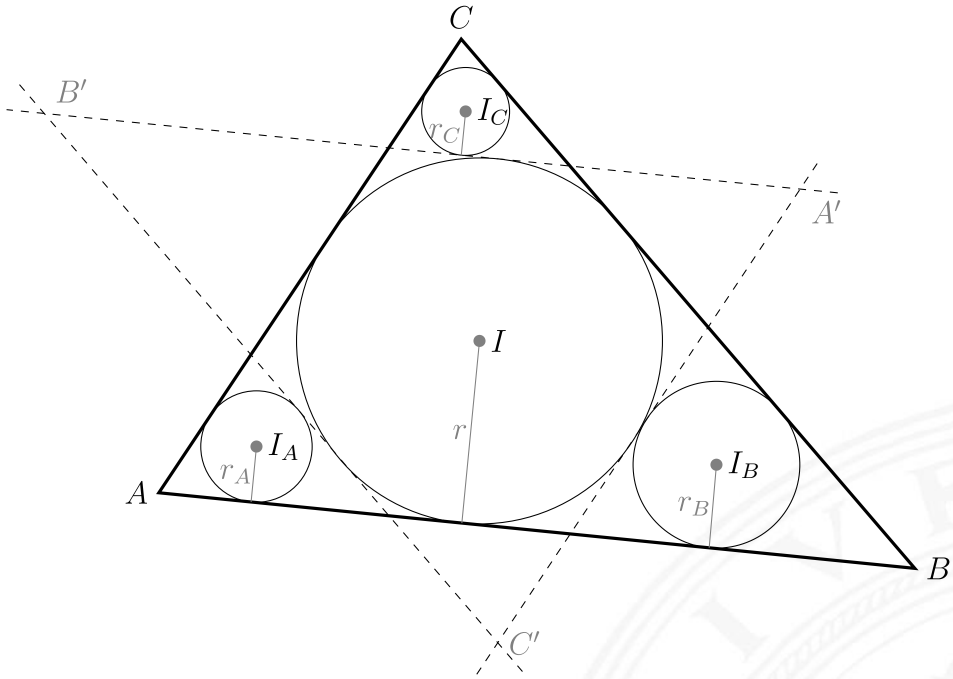
$$F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot U.$$

(b) Beweist: Das Dreieck ΔABC ist genau dann rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, wenn $F = r^2 + c \cdot r$ gilt, wobei $c = |AB|$ sei.

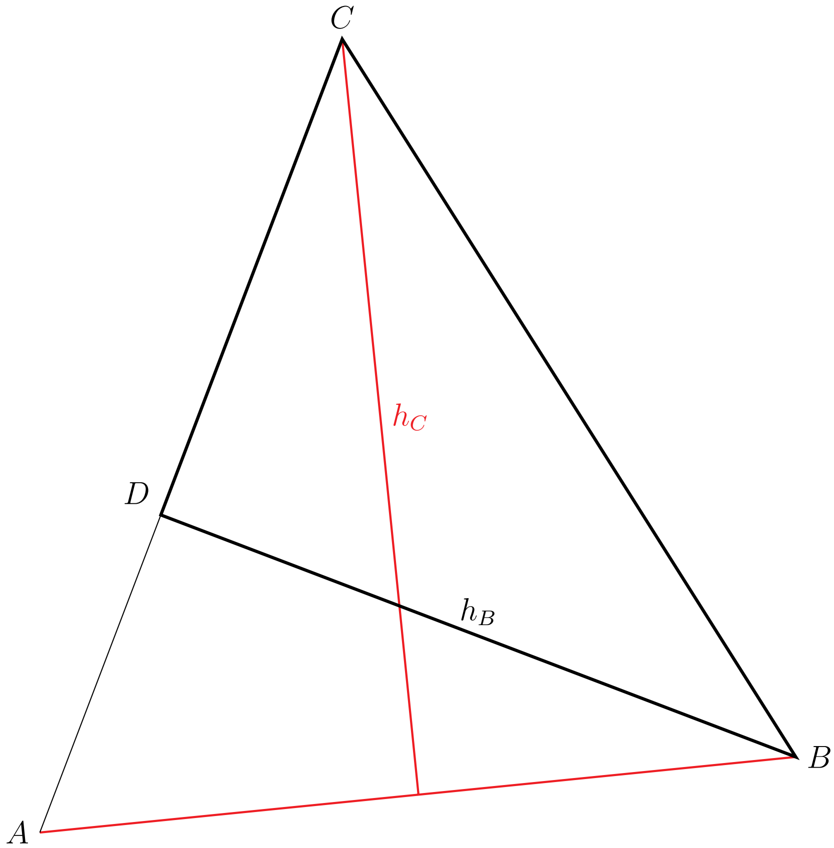
Nun wird der Inkreis des Dreiecks ΔABC von drei Parallelen zu den Grundseiten berührt (siehe Abbildung unten). Diese drei Parallelen schneiden drei kleine Dreiecke an den Ecken ab, die ihrerseits je einen Inkreis haben.

(c) Beweist, dass das Dreieck, das sich aus den drei Parallelen ergibt ($\Delta A'B'C'$ in der Abbildung unten), kongruent zum ursprünglichen Dreieck ΔABC ist.

(d) Beweist: Der Radius r des ursprünglichen Inkreises ist die Summe der drei kleinen Inkreisradien r_A, r_B und r_C.



Oberstufe (11, 12, 13)



Aufgabe 1 (10+10 Punkte)**.** Das Dreieck ΔABC sei gleichschenklig mit Basis AB. Die darauf senkrecht stehende Höhe habe die Länge h_C. Zur Grundseite AC sei D der Fußpunkt der Höhe mit Länge h_B.

(a) Sei nun $h_C = |AB|$. Zeigt, dass sich die Seitenlängen im Dreieck ΔDBC verhalten wie $3 : 4 : 5$.

Hinweis: Hier kann man geometrisch mit der Ähnlichkeit von Dreiecken argumentieren.

(b) Mit natürlichem n sei nun $h_C = n \cdot \frac{|AB|}{2}$. Berechnet die Verhältnisse der Seiten des Dreiecks ΔDBC für $n = 3, 4, \ldots, 10$. Beschreibt, wie man für jedes beliebige n das Verhältnis findet.

Für welche n kann man die Verhältnisse nur mit ganzen Zahlen angeben? Für welche n kommt man bei den Verhältnissen ohne irrationale Zahlen aus? Benutzt möglichst kleine natürliche Zahlen für die Verhältnisse.

Aufgabe 2 (4+6+10 Punkte)**.** Für eine natürliche Zahl $m \geq 1$ ist $m!$, genannt m *Fakultät*, definiert als

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m.$$

Diese Zahlen wachsen rasant und 100! hat schon 158 Stellen. Wir betrachten hier noch größere Zahlen, nämlich Produkte der ersten k Fakultäten.

(a) Zeigt, dass man in

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!$$

genau einen der Faktoren $k!$ weglassen kann, so dass der Rest eine Quadratzahl ist.

(b) Zeigt, dass es unmöglich ist, in

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!$$

genau einen der Faktoren $k!$ wegzulassen, so dass der Rest eine Quadratzahl ist.

(c) Welchen Faktor $k!$ muss man in

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$$

weglassen, so dass der Rest eine Quadratzahl ist?

Aufgabe 3 (3+3+5+6+3 Punkte)**.** Dagobert Duck stellt fest, dass er seine Geldsäcke sowohl als Dreieck (also erste Reihe mit einem Sack, zweite mit zweien usw.) als auch als Quadrat anordnen kann.

(a) Welche Anzahlen an Geldsäcken zwischen 1 und 100 haben diese Eigenschaft?

(b) Wir wissen aber, dass Dagobert Duck zwischen 1000 und 2000 Säcke besitzt. Wie viele kann er dann haben?

(c) Zeigt, dass man die ganzzahligen Lösungen des Problems

$$\frac{m \cdot (m+1)}{2} = n^2$$

aus den ganzzahligen Lösungen der *Pellschen Gleichungen*

$$b^2 - 2a^2 = 1 \quad \text{oder} \quad b^2 - 2a^2 = -1$$

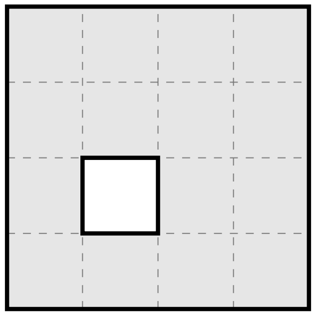
erhalten kann.

Hinweis: Verwendet, dass m und $m+1$ teilerfremd sind und überlegt, welche Terme dann Quadratzahlen sein müssen.

(d) Wenn man eine Lösung (a, b) einer der beiden Pellschen Gleichungen hat, so kann man daraus eine Lösung der jeweils anderen Gleichung konstruieren. So erhält man rekursiv immer weitere Lösungen der Gleichungen. Findet dieses Verfahren, beschreibt und begründet es.

(e) Dagobert Duck ist erstaunt, dass er auch seine Münzen als Dreieck oder Quadrat anordnen kann. Als Milliardär besitzt er über 10^9 Münzen. Wie viele könnten es sein?

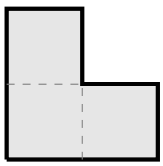
Aufgabe 4 (3+6+6+5 Punkte)**.** Aus dem abgebildeten 4×4-Quadrat wurde eines der Kästchen (ein 1×1-Quadrat) entfernt:



(a) Welche verschiedenen Formen kann man durch Entfernen eines Kästchens aus einem 4×4-Quadrat erhalten?

(Zwei Formen sind *verschieden*, wenn sie sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen.)

Ein *L-Triomino* besteht aus drei Kästchen, das mittlere Kästchen hat zwei benachbarte Seiten mit jeweils einem der anderen Kästchen gemeinsam:



(b) Zeigt, dass jede der im letzten Aufgabenteil gefundenen Formen mit L-Triominos ausgelegt werden kann. Dabei soll die gesamte Fläche überdeckt werden, ohne dass sich die L-Triominos überschneiden.

(c) Aus einem 8×8-Quadrat wird ein beliebiges Kästchen entfernt. Zeigt, dass sich die so erzeugte Form mit L-Triominos auslegen lässt.

(d) Aus einem Quadrat der Größe $2^n \times 2^n$ (also $2^1 \times 2^1$, $2^2 \times 2^2$, $2^3 \times 2^3$, $\ldots$) wird ein beliebiges Kästchen entfernt. Zeigt, dass sich die so erzeugte Form in jedem Fall mit L-Triominos auslegen lässt.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Gibt es noch mehr $k \times k$-Quadrate mit dieser Eigenschaft?

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Wenn Anna im ersten Zug den Haufen aus sechs Steinen in drei Haufen aus je zwei Steinen zerlegt, muss in den nächsten drei Zügen jeweils ein Haufen aus zwei Steinen zerlegt werden. Danach ist das Spiel beendet. Daher macht Ben dann in jedem Fall den letzten Zug und Anna gewinnt.

(b) Bei Spielen mit 2, 3, 4, 5, 7 oder 8 Steinen kann Ben immer gewinnen, bei Spielen mit 9 oder 10 Steinen kann Anna immer gewinnen:

Bei 2, 3, 5 oder 7 Steinen muss Anna den Haufen bereits im ersten Zug in einzelne Steine zerlegen und hat sofort verloren.

Beim Spiel mit 4 Steinen muss Anna den Haufen in zwei Haufen aus 2 Steinen teilen, wenn sie nicht sofort verlieren will. In den nächsten beiden Zügen muss dann jeweils einer der Haufen zerteilt werden, so dass Anna den letzten Zug macht.

Beim Spiel mit 8 Steinen verliert Anna entweder sofort oder sie zerlegt den Haufen in vier Haufen mit je 2 Steinen oder in zwei Haufen mit je 4 Steinen. Wenn noch vier Haufen mit je zwei Steinen übrig sind, dauert das Spiel noch genau 4 Züge und Anna verliert. Im letzten Fall kann Ben einen der beiden Haufen in einzelne Steine zerlegen. Dann ist Anna an der Reihe und der einzige Haufen mit mehr als einem Stein hat 4 Steine. Nach den Überlegungen zum Spiel mit 4 Steinen verliert Anna also.

Wenn mit 9 Steinen gespielt wird, kann Anna im ersten Zug drei Haufen aus jeweils 3 Steinen erzeugen, die in den nächsten drei Zügen in einzelne Steine zerteilt werden müssen, so dass Ben als letztes zieht. Wird mit 10 Steinen gespielt und Anna bildet im ersten Zug fünf Haufen aus je 2 Steinen, so dauert das Spiel noch fünf Züge, so dass Anna ebenfalls gewinnt.

(c) Ben gewinnt, falls n eine Primzahl oder eine Zweierpotenz ist, in allen anderen Fällen gewinnt Anna:

Falls n eine Primzahl ist, muss Anna den Haufen im ersten Zug in einzelne Steine zerlegen und verliert sofort.

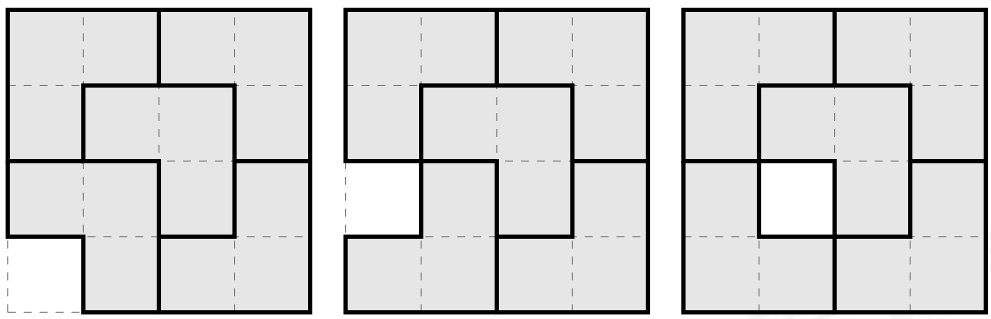
Wenn n ungerade, aber keine Primzahl ist, kann Anna im ersten Zug eine ungerade Anzahl von Haufen erzeugen, deren Steinanzahl eine Primzahl ist. Danach muss in jedem Zug jeweils ein Haufen in einzelne Steine zerlegt werden, so dass Ben den letzten Zug machen muss.

Falls n eine Zweierpotenz ist, können im Spiel auch nur Haufen gebildet werden, deren Steinanzahl eine Zweierpotenz ist: Jedes Mal, wenn ein Haufen mit einer bestimmten Anzahl von Steinen zerlegt wird, haben alle neu entstehenden Haufen einen Teiler dieser Zahl viele Steine und Teiler von Zweierpotenzen sind ebenfalls Zweierpotenzen. Daher wird in jedem Zug ein Haufen in eine gerade Anzahl von Haufen aufgeteilt. Die Anzahl von verschiedenen Haufen vergrößert sich also in jedem Zug um eine ungerade Zahl. Sie ist somit immer abwechselnd ungerade und gerade. Da sie vor dem ersten Zug ungerade ist (nämlich 1) und nach dem letzten Zug gerade ist, muss das Spiel aus einer ungeraden Anzahl von Zügen bestehen. Anna verliert also immer, sogar unabhängig davon, wie Ben spielt.

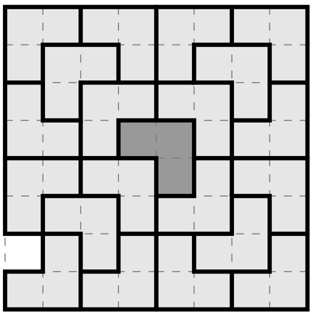
Wenn n eine gerade Zahl, aber keine Zweierpotenz, kann Anna den Haufen im ersten Zug in eine ungerade Anzahl von Haufen zerlegen, die aus einer Zweierpotenz vielen Steinen bestehen. Nach der obigen Argumentation dauert das Spiel danach noch eine ungerade Anzahl von Zügen, also verliert Ben.

Lösung 2. (a) Die Ecken lassen sich durch Drehungen des Quadrats ineinander überführen, die vier Felder in der Mitte ebenso. Jedes Feld am Rand, das nicht in der Ecke liegt, lässt sich ebenfalls durch Drehungen und Spiegelungen des Quadrats in jedes andere solche überführen. Es gibt also drei verschiedene Formen, bei denen ein Eckfeld, ein mittleres Feld bzw. ein Randfeld, das kein Eckfeld ist, entfernt wurde. Die Formen sind im nächsten Lösungsteil abgebildet.

(b) Hier ist für jede Form eine Überdeckung:



(c) Durch Drehen und Spiegeln kann das entfernte Kästchen in das 4×4-Quadrat in der unteren linken Ecke gebracht werden. Dieses 4×4-Quadrat wird dann wie im vorherigen Aufgabenteil überdeckt. Die 4×4-Quadrate in den übrigen Ecken werden ebenfalls wie im vorherigen Aufgabenteil überdeckt, so dass die nicht überdeckten Kästchen genau in der Mitte des 8×8-Quadrats sind. Die drei nicht überdeckten Kästchen bilden also auch ein L-Triomino, so dass sie auch überdeckt werden können. Beispiel:



(d) Genau wie man im vorherigen Teil von 4×4 zu 8×8 gekommen ist, kommt man auch von 8×8 zu 16×16 usw. Es bleibt das 2×2-Quadrat mit einem entfernten Kästchen; diese Form ist selbst ein L-Triomino.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Ist k durch 3 teilbar, so ist auch die Anzahl der Kästchen des Quadrats insgesamt durch 3 teilbar, aber nach Entfernen eines Kästchens nicht mehr, so dass die Form nicht mit L-Triominos ausgelegt werden könnte, die jeweils aus 3 Kästchen bestehen.

Ist k nicht durch 3 teilbar, so lässt die Anzahl der Kästchen des Quadrats stets einen Rest von 1 bei der Teilung durch 3, so dass das Quadrat von der Anzahl her nach Entfernung eines Kästchens mit L-Triominos ausgelegt werden kann. Quadratzahlen lassen nämlich immer einen Rest von 0 oder 1 bei der Teilung durch 3:

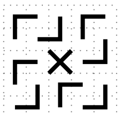
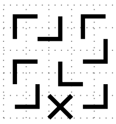
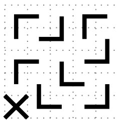
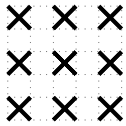
$$(3 \cdot \ell + 1)^2 = 3 \cdot (3 \cdot \ell^2 + 2 \cdot \ell) + 1 \quad \text{und} \quad (3 \cdot \ell + 2)^2 = 3 \cdot (3 \cdot \ell^2 + 4 \cdot \ell + 1) + 1$$

Das konkrete Auslegen für nicht durch 3 teilbare k ist immer möglich, solange $k \neq 5$ gilt. Für $k = 5$ dürfen nur bestimmte Kästchen entfernt sein.

Für $k = 1$ ist nach Entfernen des einzigen Kästchens nichts mehr auszulegen, es ist also möglich. Die 2er-Potenzen $k = 2$ und $k = 4$ wurden schon behandelt, die kleinste neu zu betrachtende Zahl ist also $k = 5$. Danach kann man jeweils kleinere Quadrate in größere einbetten, nachdem man zeigt, wie man entlang von zwei benachbarten Rändern auslegt. Beginnend mit den Lösungen von $k = 7$ kann man für alle k, die den Rest 1 bei der Teilung durch 3 lassen, eine Lösung für das $(k+4) \times (k+4)$-Quadrat bekommen; beginnend mit den Lösungen von $k = 8$ kann man für alle k, die den Rest 2 bei der Teilung durch 3 lassen, eine Lösung für das $(k+2) \times (k+2)$-Quadrat bekommen. Da $k = 8$ als 2er-Potenz bereits bekannt ist, ist die wesentliche Arbeit, alle Fälle für $k = 7$ zu zeigen.

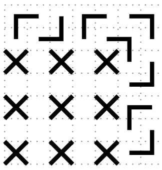
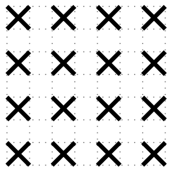
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\surd$	$\surd$	X	$\surd$	(X)	X	$\surd$	$\surd$	X	$\surd$	$\surd$	X	$\surd$	$\surd$	X	$\surd$	$\surd$

Zunächst wird gezeigt, dass für $k = 5$ in jeder zweiten Reihe jedes zweite Feld entfernt sein kann:

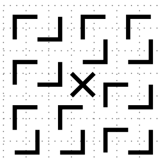
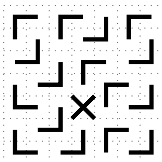
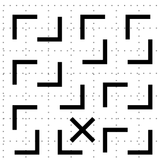
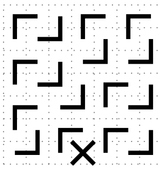
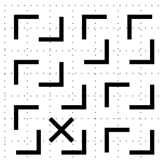
 ,  und  , also insgesamt  .

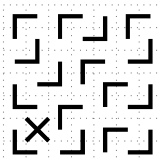
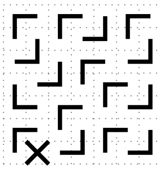
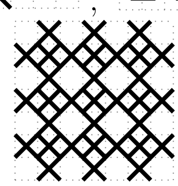
Ist eins der anderen Felder entfernt, kann wirklich nicht ausgelegt werden. Dies wird am Ende noch gezeigt.

Für $k = 7$ kann auch in jeder zweiten Reihe jedes zweite Feld entfernt sein, da nach Abtrennen eines Randes $k = 5$ genutzt werden kann:

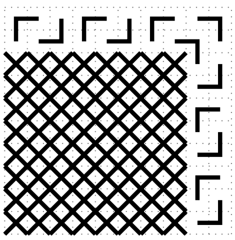
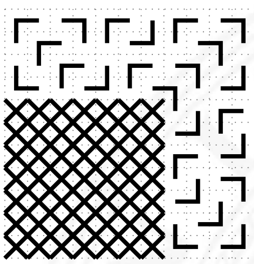
 , also insgesamt  .

Für $k = 7$ können aber auch alle anderen Felder entfernt sein:

 ,  ,  ,  ,  ,

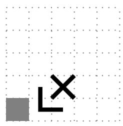
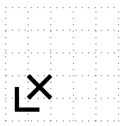
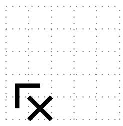
 und  , also auch  .

Für $k = 10$ kann wie bei $k = 7$ ein zwei Felder breiter Rand abgetrennt werden, somit können alle Felder wie bei $k = 8 = 2^3$ entfernt sein. Für $k = 11$ kann ein vier Felder breiter Rand abgetrennt werden, somit können alle Felder wie bei $k = 7$ entfernt sein:

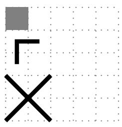
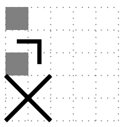
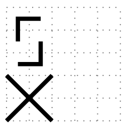
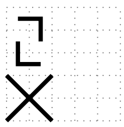
 für $k = 10$ aus 8 und  für $k = 11$ aus 7.

Solche Ränder lassen sich jeweils um drei Felder waagerecht und senkrecht verlängern. Also erhält man $k = 13$ aus $k = 11$ und $k = 14$ aus $k = 10$, danach $k = 16$ aus $k = 14$ und $k = 17$ aus $k = 13$ usw. Insgesamt kann also für $k > 5$ bei allen nicht durch 3 teilbaren k jedes Feld entfernt sein.

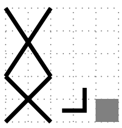
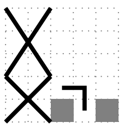
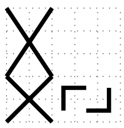
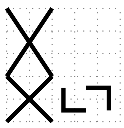
Bleibt zu zeigen, dass für $k = 5$ bei einer Auslegung mit L-Triominos jedes Feld der geraden Zeilen und Spalten nicht (als einziges) entfernt sein kann. Das sind – bis auf Drehungen und Spiegelungen – drei verschiedene Felder. In einem Fall muss – bis auf Spiegelung – ein L-Triomino so eingesetzt werden, dass eine Ecke sofort unmöglich auszulegen ist. In den anderen beiden Fällen bleibt derselbe Rest, nachdem ein Stein platziert wurde, der nicht anders liegen kann:

 ,  und  .

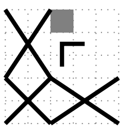
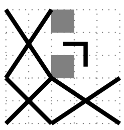
Oberhalb des belegten Bereichs kann der verbleibende Fall nur so ausgefüllt werden:

 ,  ,  oder  .

Daneben kann nur noch so ausgefüllt werden:

 ,  ,  oder  .

Das in jedem Fall verbleibende 3×3-Quadrat kann nicht ausgefüllt werden, da beim Versuch die Mitte zu belegen, sofort mindestens eine Ecke nicht mehr belegt werden kann:

 oder  bzw. gedreht oder gespiegelt.

Ein $k \times k$-Quadrat nach Entfernen eines Feldes mit L-Triominos auszulegen ist also genau dann möglich, wenn k nicht durch drei teilbar ist und wenn im Fall $k = 5$ die Zeile und Spalte des entfernten Feldes nicht gerade ist.

Lösung 3. (a) Bei der Summe 6 kann P größer als S sein: Falls $a = b = c = 2$ gilt, ist $S = 6$ und $P = 8$.

Wenn die Summe S höchstens 5 ist, ist das Produkt P in jedem Fall kleiner als S: Da $2+2+2=6$, ist dann mindestens eine der Zahlen a, b und c eine 1. Wenn zwei der Zahlen 1 sind, ist das Produkt der drei Zahlen gleich der letzten Zahl, also um 2 kleiner als die Summe. Ist nur eine Zahl eine 1, dann müssen die anderen beiden Zahlen beide gleich 2 sein. Somit gilt $P = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ und $S = 1+2+2 = 5$, also ist ebenfalls $P < S$.

(b) Es gibt keine andere Möglichkeit mit $S = 6$ und $P > S$: Wenn nicht alle drei Zahlen gleich 2 sind, ist mindestens eine Zahl eine 1. Wenn zwei Zahlen 1 sind, ist S größer als P. Die einzige andere Möglichkeit ist 1, 2 und 3. Dann gilt $S = P = 6$.

(c) Wenn S mindestens 7 ist, gibt es immer zumindest die Möglichkeiten 1, 2 und $S-3$ bzw. 2, 2 und $S-4$. Da $S \geq 7$ ist, gilt im ersten Fall

$$P = 1 \cdot 2 \cdot (S-3) = 2S - 6 = S + (S-6) > S$$

und im zweiten Fall

$$P = 2 \cdot 2 \cdot (S-4) = 4S - 16 = S + (3S - 16) > S.$$

(d) Da es nur bei der Summe $S = 6$ genau ein Beispiel mit dieser Summe und $P > S$ gibt, weiß Petrosilius nach Sarumans Aussage, dass $S = 6$ gilt. Weil $P < S$ gilt, müssen nach den Überlegungen im vorletzten Aufgabenteil zwei Zahlen gleich 1 sein, dann ist die dritte Zahl eine 4 und $P = 4$.

Lösung 4. (a) Mögliche Darstellungen sind zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
1 &= (3^2+3^2) - (4^2+1^2)\\
2 &= (3^2+1^2) - (2^2+2^2)\\
3 &= (2^2+1^2) - (1^2+1^2)\\
4 &= (5^2+2^2) - (4^2+3^2)\\
5 &= (3^2+1^2) - (2^2+1^2)\\
6 &= (2^2+2^2) - (1^2+1^2)\\
7 &= (4^2+1^2) - (3^2+1^2)\\
8 &= (5^2+1^2) - (3^2+3^2)\\
9 &= (5^2+3^2) - (4^2+3^2)\\
10 &= (4^2+2^2) - (3^2+1^2)
\end{aligned}$$

(b) Jede ungerade Zahl ab 3 ist die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden positiven Quadratzahlen: Es ist $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, $7 = 4^2 - 3^2$, $\ldots$, allgemein gilt

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Damit erhält man für jede ungerade Zahl ab 3 eine Darstellung: Man addiert zu diesen beiden Quadratzahlen jeweils eine gleiche Quadratzahl, zum Beispiel 1:

$$2n + 1 = ((n+1)^2 + 1^2) - (n^2 + 1^2).$$

Da auch 1 darstellbar ist, gibt es für alle ungeraden Zahlen eine Darstellung.

(c) Indem man die 1^2 in der vorderen Klammer durch eine $2^2 = 4$ ersetzt, kann man den Ausdruck um 3 vergrößern und erhält eine Darstellung für alle geraden Zahlen ab 6:

$$2n + 4 = ((n+1)^2 + 2^2) - (n^2 + 1^2).$$

Da auch für 2 und 4 schon Darstellungen angegeben wurden, sind also auch alle geraden Zahlen darstellbar.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Die zwölfte Schicht wird aus

$$1+2+\cdots+12 = (1+12)+(2+11)+\cdots+(6+7) = 6\cdot 13 = \frac{12\cdot(12+1)}{2} = 78$$

Kugeln gebildet, die Anzahl ist die zwölfte Dreieckszahl.

(b) Die Anzahl der Kugeln einer Pyramide der Höhe n bezeichnen wir als n-te Pyramidenzahl $P(n)$. Die Pyramidenzahlen ergeben sich jeweils durch Aufaddieren der Dreieckszahlen $D(n)$:

$$D(n+1) = D(n)+n+1 \qquad \text{und} \qquad P(n+1) = P(n)+D(n+1)$$

Notiert man alle Zwischenergebnisse der Pyramidenzahlen, bis 1600 überschritten wird, kann man diese in der nächsten Teilaufgabe wieder benutzen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$D(n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
$P(n)$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560

n	15	16	17	18	19	20	21
$D(n)$	120	136	153	171	190	210	231
$P(n)$	680	816	969	1140	1330	1540	1771

Man kann ablesen, dass $P(20) = 1540 \leq 1600$ und $P(21) = 1771 > 1600$. Also beträgt die Höhe einer Tetraederpyramide aus maximal 1600 Kugeln 20 und es bleiben $1600 - 1540 = 60$ Kugeln übrig.

(c) Hat eine der beiden Pyramiden die Höhe 20, so wissen wir bereits, dass 60 Kugeln übrig sind, woraus noch eine Pyramide der Höhe 6 gebaut werden kann. Insgesamt sind dann noch $60 - P(6) = 4$ Kugeln übrig. Wir zeigen noch, dass keine kleinere Zahl an Kugeln übrig bleiben kann, wenn aus 1600 Kugeln zwei Pyramiden gebaut werden sollen.

Eine Pyramide der Höhe 15 benötigt 680, also weniger als die Hälfte der 1600 Kugeln. Bei zwei solchen sind über 4 Kugeln übrig, so dass eine der Pyramiden die Höhe 16, 17, 18 oder 19 haben müsste.

Höhe n der ersten Pyramide	16	17	18	19
$P(n)$	816	969	1140	1330
übrig nach erster Pyramide $1600 - P(n)$	784	631	460	250
größtes noch mögliches $P(m)$	680	560	455	220
Höhe m der zweiten Pyramide	15	14	13	10
insgesamt übrig $1600 - P(n) - P(m)$	104	71	5	30

In keinem Fall sind weniger als 4 Kugeln übrig, so dass die Pyramiden der Höhen 6 und 20 wirklich am wenigsten der 1600 Kugeln übrig lassen.

(d) Vergleicht man die Formel für die Dreieckszahlen

$$D(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

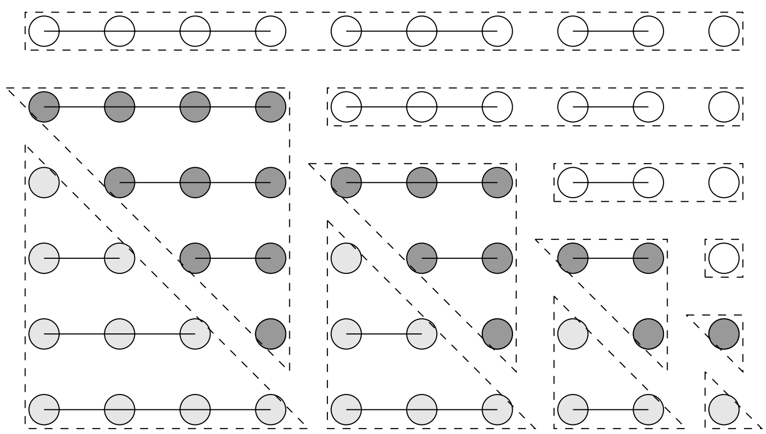
mit der vorgegebenen Formel für die Anzahl der Kugeln der Pyramide

$$P(n) = D(1) + D(2) + \cdots + D(n) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

so erhält man äquivalent

$$P(n) = \frac{1}{3} D(n) \cdot (n+2).$$

Es reicht also zu zeigen, dass es möglich ist, in einem Rechteck $D(n) \times (n+2)$ jede der ersten n Dreieckszahlen dreimal unterzubringen:



Jeweils zwei $D(k)$ bilden ein Rechteck $k \times (k+1)$; diese Rechtecke werden treppenförmig nebeneinander gesetzt. Die Treppe wird durch die dritten $D(k)$ aufgefüllt, die jeweils ein Rechteck $(\frac{1}{2}k \cdot (k+1)) \times 1$ bilden, jeweils auf alle Rechtecke bis $k \times (k+1)$ zusammen. Zusammen ergibt sich das gewünschte Rechteck $D(n) \times (n+2)$.

Alternativ kann man auch mit Hilfe vollständiger Induktion folgern, das heißt, man zeigt es für $n = 1$ und dann jeweils für jeden Nachfolger. Die Formel gilt sicher für $n = 1$, es ist nämlich

$$P(1) = D(1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 1.$$

Bei der vollständigen Induktion wird nun vorausgesetzt, dass die Formel für ein bestimmtes n gilt. Damit wird dann bewiesen, dass die Formel auch für den Nachfolger $n+1$ gültig ist:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n) + D(n+1) \\ &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + \frac{[n+1] \cdot ([n+1]+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot [n+1] \cdot ([n+1]+1) \cdot ([n+1]+2) \end{aligned}$$

Die Formel gilt also zunächst für $n = 1$ und dann für jeden Nachfolger, also für $n = 2$, $n = 3$, ..., und damit für jede natürliche Zahl n.

Noch eine Alternative ist, aus sechs Pyramiden, die jeweils geschert werden müssen, einen Quader $n \times (n+1) \times (n+2)$ zusammenzusetzen. Dazu zerlegt man das oben abgebildete $D(n) \times (n+2)$-Rechteck an der $D(n)$ langen Seite zu Rechtecken mit Seitenlängen $n \times (n+2)$, $(n-1) \times (n+2)$, ..., $1 \times (n+2)$ und legt die Rechtecke an der linken Kante übereinander, so dass man ein Prisma erhält. Zwei solche Prismen bilden den Quader.

Lösung 2. (a) Man kann zum Beispiel wie folgt neun Haufen aus je 11 Münzen erzeugen: Zunächst bildet man einen Haufen mit 35 und einen Haufen mit 64 Münzen:

Haufen	Zug
13 41 45	$13 + 45 = 58$
41 58	$58 = 2 \cdot 29$
41 29 29	$41 + 29 = 70$
70 29	$70 = 2 \cdot 35$
35 35 29	$35 + 29 = 64$
35 64	

Den Haufen mit 64 Münzen kann man in einzelne Münzen zerlegen, indem man ihn halbiert und auch jeweils alle so entstandenen Haufen immer weiter halbiert. Fügt man nacheinander 53 einzelne Münzen zum Haufen mit 35 Münzen, erhält man einen Haufen mit 88 Münzen, aus dem man durch wiederholtes Halbieren wiederum acht Haufen mit je 11 Münzen erzeugen kann. Die restlichen elf einzelnen Münzen werden zu einem neunten Haufen mit 11 Münzen zusammenfügt. (Man kann mit weniger Zügen auskommen, wenn der Haufen mit 64 Münzen nicht vollständig zerlegt wird.)

(b) Es ist nicht möglich aus den neun Haufen mit jeweils 11 Münzen elf Haufen aus je 9 Münzen zu erzeugen: Die Summe von Vielfachen von 11 ist ebenfalls ein Vielfaches von 11 und die Hälfte einer geraden durch 11 teilbaren Zahl ist ebenfalls durch 11 teilbar. Wenn einmal alle Münzenanzahlen der Haufen durch 11 teilbar sind, gilt das also auch nach allen weiteren Zügen.

(c) Zwei Haufen mit 11 und 13 Münzen müssen im ersten Zug zu einem Haufen mit 24 Münzen zusammengefasst werden. 24 ist durch die ungerade Zahl 3 teilbar, in den weiteren Zügen können also nur Haufen mit durch 3 teilbaren Münzenanzahlen entstehen. Daher sind keine anderen Verteilungen mit gleich großen Haufen erzeugbar als ein Haufen mit 24 Münzen, zwei Haufen mit je 12 Münzen, vier Haufen mit je 6 Münzen oder acht Haufen mit je 3 Münzen. Diese sind tatsächlich alle erreichbar, man erhält jeweils die nächste Verteilung in der Aufzählung, indem man jeden Haufen einmal halbiert.

Da 15 und 18 ebenfalls durch 3 teilbar sind, lassen sich auch hier nur durch 3 teilbare Münzenanzahlen erhalten. Elf Haufen mit je 3 Münzen erzeugt man zum Beispiel wie folgt: Aus den 18 Münzen bildet man zwei Haufen mit je 9 Münzen, einen davon vereinigt man mit den 15 Münzen zu einem Haufen mit 24 Münzen, den man schrittweise in Haufen mit 3 Münzen zerlegen kann. Fügt man wiederum einen zu dem Haufen mit 9 Münzen und halbiert so lange Haufen, bis es keinen mit einer geraden Anzahl mehr gibt, haben alle Haufen 3 Münzen. Außerdem kann man im ersten Zug beide Haufen zu einem Haufen mit 33 Münzen zusammenfügen. Da 3 und 33 die einzigen durch 3 teilbaren Teiler von 33 sind, gibt es keine weiteren Möglichkeiten.

(d) Falls a und b ungerade sind, ist es genau dann möglich, wenn $a+b$ eine Zweierpotenz ist: Im ersten Zug müssen beide Haufen zusammengefasst werden. Jeder ungerade Teiler von $a+b$ teilt also auch alle danach erzeugten Münzenanzahlen. Falls Haufen mit nur einer Münze erzeugbar sind, muss $a+b$ also eine Zweierpotenz sein. Ist $a+b$ eine Zweierpotenz, so kann man den Haufen mit $a+b$ Münzen vollständig in einzelne Münzen zerlegen, indem man in jedem Zug einen Haufen halbiert, so lange das möglich ist. Dabei erhält man ausschließlich Zweierpotenzen als Anzahlen, also hat am Ende jeder Haufen nur eine Münze.

Falls mindestens eine der beiden Zahlen gerade ist, ist es genau dann möglich, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b eine Zweierpotenz ist: Andernfalls haben a und b einen gemeinsamen ungeraden Teiler $u > 1$ und alle erzeugten Haufen haben durch u teilbare Anzahlen. Wenn der $\operatorname{ggT}(a, b)$ eine Zweierpotenz ist, kann man hingegen wie folgt vorgehen, um alle Haufen vollständig in einzelne Münzen zu zerlegen: So lange es möglich ist, halbiert man jeweils einen Haufen. Wenn dabei nur Haufen mit ungerader Münzenanzahl entstanden sind, aber nicht alle Haufen gleich groß sind, nimmt man einen der beiden gleich großen Haufen, die beim letzten Halbieren entstanden sind, und fügt ihn zu einem Haufen mit einer anderen Anzahl von Münzen hinzu. Bei keinem dieser Züge verändert sich der größte gemeinsame ungerade Teiler aller Münzenanzahlen: Beim Halbieren verändert er sich nicht, da jede ganze Zahl n die gleichen ungeraden Teiler wie $2n$ hat. Gibt es zwei Haufen mit k Münzen und einer davon wird zu einem Haufen mit l Münzen hinzugefügt, so bleibt der ggT aller Münzenanzahlen gleich: Eine Zahl ist genau dann ein gemeinsamer Teiler von k und l, wenn sie ein gemeinsamer Teiler von k und $k+l$ ist. Sofern man mit diesem Verfahren eine Verteilung mit nur gleich großen Haufen mit ungeraden Anzahlen erreicht, enthalten dann alle Haufen also nur eine Münze. Es reicht also zu zeigen, dass immer nur eine endliche Anzahl solcher Züge möglich ist. Dazu betrachten wir die Summe der Quadrate aller Münzenanzahlen und zeigen, dass diese bei den beschriebenen Zügen immer kleiner wird (zumindest nach jeweils zwei Zügen). Beim Halbieren von einem Haufen mit $2n$ Münzen wird in der Summe der Quadrate der Münzenanzahlen der Summand $4n^2$ durch n^2+n^2 ersetzt. Werden zwei Haufen mit verschieden großen ungeraden Münzenanzahlen k und l zusammengefügt, so wird der daraus gebildete Haufen im nächsten Zug halbiert zu zwei Haufen mit $\frac{k+l}{2}$ Münzen. Es ist

$$\begin{aligned} k^2 + l^2 - 2\left(\frac{k+l}{2}\right)^2 &= k^2 + l^2 - \frac{1}{2}(k^2 + l^2 + 2kl) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 + l^2 - 2kl) = \frac{1}{2}(k-l)^2 > 0. \end{aligned}$$

Also wird auch dabei die Summe der Quadrate der Münzenanzahlen kleiner. Da diese Summe immer positiv sein muss, können nur endlich viele der beschriebenen Züge durchgeführt werden. Also wird zwangsläufig ein Zustand mit nur gleich großen Haufen mit ungeraden Münzenanzahlen erreicht, die nach dem obigen Argument aus jeweils nur einer Münze bestehen können.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Falls mindestens einer der Haufen eine gerade Anzahl von Münzen hat und der größte gemeinsame Teiler der drei Münzenanzahlen eine Zweierpotenz ist, kann man mit dem im letzten Aufgabenteil beschriebenen Verfahren alle Haufen in einzelne Münzen zerlegen. Haben die Münzenanzahlen einen größeren gemeinsamen ungeraden Teiler als 1, so teilt er auch alle neu gebildeten Haufen, und es ist nicht möglich.

Wenn alle Münzenanzahlen ungerade sind, müssen zunächst zwei Haufen zusammengefasst werden. Nach dem letzten Aufgabenteil ist es also genau dann möglich, wenn es eine Münzenanzahl gibt, deren größter gemeinsamer ungerader Teiler mit der Summe der beiden anderen 1 ist (oder äquivalent: mit der Summe aller Münzenanzahlen). Da die Münzenanzahlen ungerade sind und nur ungerade Teiler haben, ist das in diesem Fall gleichbedeutend damit, dass mindestens eine der Zahlen teilerfremd zur Gesamtzahl der Münzen ist. Wie das Beispiel 5, 49 und 51 zeigt, reicht nicht, dass der ggT aller Münzenanzahlen 1 ist, auch wenn diese Bedingung natürlich notwendig ist.

Lösung 3. Siehe Lösung 2 der Klassenstufe 7, 8.

Lösung 4. (a) Betrachtet man die Dreiecke ΔABI, ΔBCI und ΔCAI, so sind die jeweiligen Höhen zu den Grundseiten AB, BC bzw. CA immer r, die Flächeninhalte also $\frac{1}{2} \cdot r\,|AB|$, $\frac{1}{2} \cdot r\,|BC|$ und $\frac{1}{2} \cdot r\,|CA|$. Da $U = |AB| + |BC| + |AB|$ gilt, ergibt sich addiert wie gewünscht $F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot U$.

(b) Es ist zu zeigen, dass $\frac{1}{2}U = r + c$ genau bei rechtem Winkel $\angle ACB$ gilt, genau dann stimmen die Formeln nämlich überein.

Seien P_{AB}, P_{BC} und P_{CA} die Projektionen des Inkreismittelpunktes I auf die Seiten AB, BC bzw. CA. Damit gilt in jedem Dreieck $|AP_{CA}| = |AP_{AB}|$, $|BP_{AB}| = |BP_{BC}|$ und $|CP_{BC}| = |CP_{BA}|$, da Abstände von einem Punkt zu Berührpunkten von Tangenten an einen bestimmten Kreis stets gleich sind (eine Tangente ist die Spiegelung der anderen an der Verbindung von gemeinsamem Punkt und Kreismittelpunkt). Da

$$U = |AP_{AC}| + |AP_{AB}| + |BP_{AB}| + |BP_{BC}| + |CP_{BC}| + |CP_{CA}|$$

ist, gilt $U = 2 \cdot |CP_{CA}| + 2 \cdot |AB|$, also äquivalent $\frac{1}{2} \cdot U = |CP_{CA}| + c$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $r = |CP_{CA}|$ genau bei rechtem Winkel $\angle ACB$ gilt. Ist einerseits $\angle ACB$ ein rechter Winkel, so ist $P_{CA}IP_{BC}C$ ein Rechteck mit zwei gleichlangen benachbarten Seiten, also ein Quadrat; es gilt deshalb $r = |CP_{CA}|$. Ist andererseits $r = |CP_{CA}|$, so ist $P_{CA}IP_{BC}C$ eine Raute mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln, also ein Quadrat; somit ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.

(c) Die Parallelen sind jeweils gegenüberliegende Tangenten am Inkreis, also Punktspiegelungen am Inkreismittelpunkt. Das gesamte Dreieck $\Delta A'B'C'$ ist somit als Punktspiegelung kongruent zum Dreieck ΔABC.

(d) Die durch die Parallelen abgetrennten kleinen Dreiecke sind jeweils ähnlich zu ΔABC, da die Winkel jeweils Stufenwinkel sind. Sie sind als Punktspiegelungen außerdem jeweils kongruent zum jeweils gegenüberliegenden abgetrennten kleinen Dreieck von $\Delta A'B'C'$. Die Grundseiten der kleinen Dreiecke bei A, C' und B ergänzen sich also zur Grundseite AB des großen Dreiecks ΔABC. Da die Inkreisradien jeweils proportional zu den Grundseiten sind, ergänzen sich also auch r_A, r_C und r_B zu r.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Die Lösung des nächsten Aufgabenteils kann mit $n = 2$ hier benutzt werden. Hier ist noch eine etwas kürzere dargestellt:

Sei F der Fußpunkt der Höhe über AB, dann sind die Dreiecke ΔFBC und ΔDAB ähnlich (je ein rechter Winkel und gleiche Winkel bei B bzw. A). Es sei $s = |BC|$ die Seitenlänge des Dreiecks und $x = |CD|$. Dann gilt $s - x = \frac{1}{2}h_B$. Nach Pythagoras ist $x^2 + h_B^2 = s^2$. Einsetzen von $x = s - \frac{1}{2}h_B$ führt auf

$$(s - \frac{1}{2}h_B)^2 + h_B^2 = s^2 \iff -sh_B + \frac{1}{4}h_B^2 + h_B^2 = 0 \iff s = \frac{5}{4}h_B.$$

Ersetzen von s führt in ähnlicher Weise auf $x = \frac{3}{4}h_B$. Somit

$$x : h_B : s = 3 : 4 : 5.$$

(b) Es seien $g = \frac{|AB|}{2}$ die halbe Grundlinie, $s = |BC|$ die Seitenlänge des Dreiecks und $x = CD$. Nach Voraussetzung und nach dem Satz des Pythagoras gelten:

$$h_C = n \cdot g, \qquad s^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} h_C^2 + g^2 = (n^2+1)g^2, \qquad h_B^2 + x^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} s^2$$

und

$$\begin{aligned}
& (s-x)^2 + h_B^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} (2g)^2 \overset{\text{2. Gl.}}{=} \frac{4}{n^2+1}s^2 \\
\Longrightarrow\quad & \left(1 - \frac{4}{n^2+1}\right)s^2 - 2sx + x^2 + h_B^2 = 0 \\
\overset{\text{3. Gl.}}{\Longrightarrow}\quad & \left(1 - \frac{4}{n^2+1}\right)s^2 - 2sx + s^2 = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)s = x \\
\Longrightarrow\quad & \frac{x}{s} = \frac{n^2-1}{n^2+1}
\end{aligned}$$

und damit dann

$$\begin{aligned}
\frac{h_B}{s} \overset{\text{3. Gl.}}{=} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{s}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2} &= \sqrt{\frac{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2}{(n^2+1)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{4n^2}{(n^2+1)^2}} = \frac{2n}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

Also gilt für das Verhältnis $2n : (n^2 - 1) : (n^2 + 1)$.

Jedes Verhältnis kann nur mit ganzen Zahlen und insbesondere ohne irrationale Zahlen dargestellt werden. Für $n = 2, \dots, 10$ sind die Verhältnisse:

		$n = 2$:	$4 : 3 : 5$
$n = 3$:	$3 : 4 : 5$	$n = 4$:	$8 : 15 : 17$
$n = 5$:	$5 : 12 : 13$	$n = 6$:	$12 : 35 : 37$
$n = 7$:	$7 : 24 : 25$	$n = 8$:	$16 : 63 : 65$
$n = 9$:	$9 : 40 : 41$	$n = 10$:	$20 : 99 : 101$

Lösung 2. (a) Da $4! = 3! \cdot 4$ ist, ist $3! \cdot 4! = 3!^2 \cdot 2^2$ bereits eine Quadratzahl. Man kann noch $2! = 2$ weglassen. Also ist $1! \cdot 3! \cdot 4!$ eine Quadratzahl.

(b) Da $2! = 2$ keine Quadratzahl ist, folgt aus dem vorherigen Teil, dass $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!$ keine Quadratzahl ist. Also bleibt nach Weglassen von $5!$ keine Quadratzahl übrig. Da $5!$ aber genau einen Primfaktor 5 beinhaltet, der sonst nicht vorkommt, bleibt nach Weglassen eines anderen $k!$ auch keine Quadratzahl übrig, da solche nur eine gerade Anzahl jedes Faktors haben.

(c) Wie oben kann man zu jedem ungeraden k je zwei aufeinanderfolgende Faktoren zusammenfassen zu $k! \cdot (k+1)! = k!^2 \cdot (k+1)$. Der gesamte Ausdruck ist also Produkt von Quadratzahlen $1!^2 \cdot 3!^2 \cdot \ldots \cdot 99!^2$ mit $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 100 = 2^{50} \cdot 50!$. Da $2^{50} = (2^{25})^2$ selbst eine Quadratzahl ist, kann man den Faktor $50!$ weglassen und erhält die Quadratzahl

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 49! \cdot 51! \cdot 52! \cdot 53! \cdot \ldots \cdot 100!.$$

Lösung 3. (a) Die Dreieckszahlen unter 100 sind 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 und 91. Darunter sind nur zwei Quadratzahlen, 1 und 36.

(b) Man ermittelt, welche Dreieckszahlen $D(m) = \frac{m(m+1)}{2}$ in Frage kommen und findet

$$D(44) = 990 < 1000 < D(45) = 1035$$

und

$$D(62) = 1953 < 2000 < D(63) = 2016.$$

Da m und $m+1$ teilerfremd sind, muss der ungerade Faktor der beiden eine Quadratzahl sein und die Hälfte des geraden ebenfalls. Zwischen 45 und 62 gibt es nur eine ungerade Quadratzahl, nämlich die 49. Zwischen $\frac{46}{2} = 23$ und $\frac{62}{2} = 31$ gibt es nur eine Quadratzahl, nämlich die 25. Der ungerade

Faktor muss also 49 betragen und der gerade $2 \cdot 25 = 50$. Dagobert Duck kann also nur $D(49) = 25 \cdot 49 = (5 \cdot 7)^2 = 1225$ Geldsäcke besitzen.

Alternativ kann man sich natürlich auch (fleißig) alle Dreieckszahlen und alle Quadratzahlen zwischen 1000 und 2000 aufschreiben und vergleichen.

(c) Da m und $m+1$ teilerfremd sind, muss es ganze Zahlen a und b geben mit

$$\frac{m}{2} = a^2 \quad \text{und} \quad m+1 = b^2$$

für gerade m oder anderenfalls

$$m = b^2 \quad \text{und} \quad \frac{m+1}{2} = a^2.$$

Elimination von m liefert

$$2a^2 = m = b^2 - 1 \quad \text{oder} \quad b^2 = m = 2a^2 - 1$$

was äquivalent ist zu den Pellschen Gleichungen

$$b^2 - 2a^2 = 1 \quad \text{oder} \quad b^2 - 2a^2 = -1.$$

(d) Für die bekannten Lösungen

$$1 \cdot \frac{2}{2} = 1^2, \quad \frac{8}{2} \cdot 9 = 6^2 \quad \text{und} \quad 49 \cdot \frac{50}{2} = 35^2$$

des ursprünglichen Problems sind die Paare (a, b) der Pellschen Gleichungen $(1, 1)$ (2. P. Gl.), $(2, 3)$ (1. P. Gl.) und $(5, 7)$ (2. P. Gl.). Um noch weitere Paare (a, b) zu finden, untersucht man für ungerade b, ob $\frac{b^2 \pm 1}{2}$ eine Quadratzahl ist:

b	5	9	11	13	15	17
$\frac{b^2-1}{2}$	12	40	60	84	112	144
$\frac{b^2+1}{2}$	13	41	61	85	113	145

Das nächste Lösungspaar ist also $(12, 17)$ (1. P. Gl.). Man kann deswegen die Vermutung aufstellen, dass nach (a, b) für die eine Gleichung jeweils auch $(a + b, 2a + b)$ ein Lösungspaar für die andere Gleichung ist. Um das zu überprüfen, setzt man ein:

$$\begin{aligned}(2a + b)^2 - 2(a + b)^2 = \pm 1 &\Leftrightarrow 2a^2 - b^2 = \pm 1\\ &\Leftrightarrow b^2 - 2a^2 = \mp 1\end{aligned}$$

Die Vermutung trifft also zu.

(e) Es soll ein Lösungspaar (a, b) gefunden werden, für das $a^2b^2 \geq 10^9$ gilt, also $ab \geq 10000\sqrt{10}$. Die Iteration $(a, b) \mapsto (a + b, 2a + b)$ liefert:

$$(1, 1) \mapsto (2, 3) \mapsto (5, 7) \mapsto (12, 17) \mapsto (29, 41) \mapsto (70, 99) \mapsto (169, 239)$$

Da $169 \cdot 239 = 40391$ und $70 \cdot 99 < 7000$, ist $(a, b) = (169, 239)$ das erste Lösungspaar mit $a^2b^2 \geq 10^9$. Dagobert Duck könnte also

$$(169 \cdot 239)^2 = 40391^2 = 1631432881$$

Münzen besitzen. Vielleicht besitzt er auch 55420693056, 1882672131025, 63955431761796, 2172602007770041, 73804512832419600 oder mehr Münzen.

Lösung 4. Siehe Lösung 2 der Klassenstufe 7, 8.